Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Mirjam Dür
Dipl. Math. Stefan Bundfuss

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
30. Mai 2006

3. Übungsblatt zur „Lineare Algebra II für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G13 (Minimalpolynom)

(a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimme jeweils das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B := \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Gibt es Matrizen $E, F \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, die unterschiedliche charakteristische Polynome besitzen, deren Minimalpolynome aber übereinstimmen?

Aufgabe G14 (Eindeutigkeit des Minimalpolynoms)

Zeige, daß es zu jeder Matrix A *genau* ein Minimalpolynom gibt.

Aufgabe G15 (Symmetrisch, hermitisch, …)

Überprüfe jeweils, ob die folgenden Matrizen symmetrisch, schiefsymmetrisch, hermitisch, schiefhermitisch oder normal sind:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2i & 0 & i \\ 0 & 0 & 4 \\ -i & 4 & 4i \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Welche der Matrizen sind diagonalisierbar (über $\mathbb{C}$)?

Aufgabe G16 (Reelle symmetrische Matrizen)

Die lineare Abbildung φ sei durch eine reelle, symmetrische Matrix gegeben. Zeige, daß φ eine Folge von Streckungen, Stauchungen, Spiegelungen und Projektionen ist.

Hausübung

Aufgabe H13 (Minimalpolynom) (8 Punkte)

(a) Zeige, daß ähnliche Matrizen dasselbe Minimalpolynom besitzen.

(b) Sei A eine diagonalisierbare Matrix und

$$\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - \lambda)^{s_i}$$

das charakteristische Polynom von A, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ paarweise verschieden seien. Bestimme das Minimalpolynom von A.

Aufgabe H14 (Diagonalelemente spezieller Matrizen) (6 Punkte)

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) Ist A schiefsymmetrisch, dann gilt $a_{ii} = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(b) Ist A hermitisch, dann gilt $a_{ii} \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(c) Ist A schiefhermitisch, dann gilt $a_{ii} \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.