Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Mirjam Dür
Dipl. Math. Stefan Bundfuss

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
9. Juni 2006

3. Übungsblatt zur „Lineare Algebra II für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G13 (Minimalpolynom)

(a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimme jeweils das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B := \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Gibt es Matrizen $E, F \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, die unterschiedliche charakteristische Polynome besitzen, deren Minimalpolynome aber übereinstimmen?

Lösung:

(a) Das charakteristische Polynom von A ist offensichtlich $\chi_A(\lambda) = (\alpha - \lambda)^n$. Da das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom diegleichen Nullstellen besitzen, muß das Minimalpolynom die Form $\mu_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^k$ haben, wobei k das kleinste $k \in \mathbb{N}$ sein soll für das $(A - \alpha I)^k = 0$ gilt. Hier gilt $k = 1$. Folglich ist $\mu_A(\lambda) = \lambda - \alpha$.

Das charakteristische Polynom von B ist offensichtlich $\chi_B(\lambda) = (\alpha - \lambda)^n$. Zum Bestimmen des Minimalpolynoms ist wieder ein minimales $k \in \mathbb{N}$ zu bestimmen, für das $(A - \alpha I)^k = 0$ gilt. Die Multiplikation einer Matrix M mit $A - \alpha I$ bewirkt gerade, daß alle Spalten von M um eins nach rechts 'geschoben' werden und die erste Spalten eine Nullspalte ist. Sind $m_1, \ldots, m_n$ die Spalten von M, dann gilt $M(A - \alpha I) = (0, m_1, \ldots, m_{n-1})$. Daher gilt $k = n$ und folglich $\mu_B(\lambda) = (\lambda - \alpha)^n$.

Beachte, daß A und B dasgleiche charakteristische Polynom aber unterschiedliche Minimalpolynome besitzen.
Das charakteristische Polynom von C ist offensichtlich $\chi_C(\lambda) = (1-\lambda)^2\lambda(-1-\lambda)$ und das Minimalpolynom $\mu_C(\lambda) = (1-\lambda)\lambda(-1-\lambda)$.
Für das charakteristische Polynom von D gilt

$$\begin{aligned}\chi_D(\lambda) = \det(D-\lambda I) &= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{pmatrix} \\ &\overset{\substack{\text{Entwicklung}\\ \text{nach der}\\ \text{1. Zeile}}}{=} (3-\lambda)((4-\lambda)(5-\lambda)-2) \\ &= (3-\lambda)^2(6-\lambda).\end{aligned}$$

Es gilt

$$(D-3I)(D-6I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist $\mu_D(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-6)$ das Minimalpolynom von D.

(b) Sei

$$E := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\chi_E(\lambda) = (-1-\lambda)^2(1-\lambda) &\neq (-1-\lambda)(1-\lambda)^2 = \chi_F(\lambda), \\ \mu_E(\lambda) = (1-\lambda)(-1-\lambda) &= \mu_F(\lambda).\end{aligned}$$

Folglich gibt es Matrizen mit der gewünschten Eigenschaft.

Aufgabe G14 (Eindeutigkeit des Minimalpolynoms)

Zeige, daß es zu jeder Matrix A *genau* ein Minimalpolynom gibt.

Lösung: Angenommen μ und ν sind Minimalpolynome von A. Dann haben beide Polynome dengleichen Grad, da ansonsten eines der beiden die Eigenschaft, daß Minimalpolynome Polynome minimalen Grades sind, verletzen würde. Es gelte $\mu(\lambda) = \sum_{i=0}^n \mu_i\lambda^i$ und $\nu(\lambda) = \sum_{i=0}^n \nu_i\lambda^i$. Da Minimalpolynome normiert sind gilt $\mu_n = \nu_n = 1$. Daraus folgt

$$0 = \mu(A) - \nu(A) = \sum_{i=0}^{n-1}(\mu_i - \nu_i)A^i.$$

Daher ist $\sum_{i=0}^{n-1}(\mu_i-\nu_i)\lambda^i$ auch ein Minimalpolynom, dessen Grad aber kleiner als n ist, was ein Widerspruch zur Annahme ist.

Aufgabe G15 (Symmetrisch, hermitisch, ...)

Überprüfe jeweils, ob die folgenden Matrizen symmetrisch, schiefsymmetrisch, hermitisch, schiefhermitisch oder normal sind:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2i & 0 & i \\ 0 & 0 & 4 \\ -i & 4 & 4i \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Welche der Matrizen sind diagonalisierbar (über $\mathbb{C}$)?

Lösung: Die Matrix A ist symmetrisch und als Diagonalmatrix auch normal und diagonalisierbar.

Die Matrix B ist schiefsymmetrisch und daher auch normal. Folglich ist sie diagonalisierbar.

Für die Matrix C gilt $CC^* = I$. Somit ist sie unitär und daher auch normal. Daraus folgt, daß sie diagonalisierbar ist.

Aufgabe G16 (Reelle symmetrische Matrizen)

Die lineare Abbildung φ sei durch eine reelle, symmetrische Matrix gegeben. Zeige, daß φ eine Folge von Streckungen, Stauchungen, Spiegelungen und Projektionen ist.

Lösung: Reele symmetrische Matrizen besitzen nur reelle Eigenwerte und sind diagonalisierbar. Bezüglich einer geeigneten Basis $b_1, \ldots, b_n$ (in diesem Fall kann diese als Orthonormalbasis gewählt werden) hat φ die Darstellungsmatrix

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_i & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{:=F_i} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Betrachte die F_i:

- Ist $\lambda_i > 1$, dann ist F_i eine Streckung um den Faktor λ_i in Richtung b_i.
- Ist $\lambda = 1$, dann ist F_i die Identität.
- Ist $0 < \lambda_i < 1$, dann ist F_i eine Stauchung um den Faktor λ_i in Richtung b_i.
- Ist $\lambda_i = 0$, dann ist F_i eine Projektion auf den Unterraum $\{b_i\}^\perp$.
- Ist $-1 < \lambda_i < 0$, dann ist F_i eine Stauchung um den Faktor $-\lambda_i$ in Richtung b_i und eine Spiegelung am Unterraum $\{b_i\}^\perp$.
- Ist $\lambda = -1$, dann ist F_i eine Spiegelung am Unterraum $\{b_i\}^\perp$.
- Ist $\lambda_i < -1$, dann ist F_i eine Streckung um den Faktor $-\lambda_i$ in Richtung b_i und eine Spiegelung am Unterraum $\{b_i\}^\perp$.

Beachte, daß die Reihenfolge der F_i keine Rolle spielt.

Hausübung

Aufgabe H13 (Minimalpolynom) (8 Punkte)

(a) Zeige, daß ähnliche Matrizen dasselbe Minimalpolynom besitzen.

(b) Sei A eine diagonalisierbare Matrix und

$$\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - \lambda)^{s_i}$$

das charakteristische Polynom von A, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ paarweise verschieden seien. Bestimme das Minimalpolynom von A.

Lösung:

(a) Seien A und B ähnliche Matrizen, das heißt es gibt eine invertierbare Matrix S, sodaß $B = S^{-1}AS$ gilt. Für die Minimalpolynome von A und B gilt

$$\mu_A(B) = \mu_A(S^{-1}AS) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (S^{-1}AS)^i = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i S^{-1} A^i S = S^{-1} \mu_A(A) S = 0,$$
$$\mu_B(A) = \mu_B(SBS^{-1}) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (SBS^{-1})^i = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i S B^i S^{-1} = S^{-1} \mu_B(B) S = 0.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Minimalpolynome muß $\mu_A = \mu_B$ gelten.

(b) Da A diagonalisierbar ist, gibt es eine zu A ähnliche Diagonalmatrix D. Da ähnliche Matrizen dasgleiche Minimalpolynom besitzen, gilt $\mu_A = \mu_D$. Es gilt

$$(D - \lambda_1 I) \dots (D - \lambda_r I) = 0.$$

Da χ_A und μ_D dieselben Nullstellen besitzen, folgt

$$\mu_A(\lambda) = \mu_D(\lambda) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda - \lambda_i).$$

Aufgabe H14 (Diagonalelemente spezieller Matrizen) (6 Punkte)

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) Ist A schiefsymmetrisch, dann gilt $a_{ii} = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

(b) Ist A hermitisch, dann gilt $a_{ii} \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

(c) Ist A schiefhermitisch, dann gilt $a_{ii} \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Lösung:

(a) Ist A schiefsymmetrisch, dann gilt $a_{ij} = -a_{ji}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Insbesondere gilt $a_{ii} = -a_{ii}$. Daraus folgt $a_{ii} = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

(b) Ist A hermitisch, dann gilt $a_{ij} = \overline{a}_{ji} = \mathrm{Re}(a_{ji}) - \mathrm{Im}(a_{ji})$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Insbesondere gilt $a_{ii} = \overline{a}_{ii} = \mathrm{Re}(a_{ii}) - \mathrm{Im}(a_{ii})$. Daraus folgt $\mathrm{Im}(a_{ii}) = 0$ also $a_{ii} \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

(c) Ist A schiefhermitisch, dann gilt $a_{ij} = -\overline{a}_{ji} = -\mathrm{Re}(a_{ji}) + \mathrm{Im}(a_{ji})$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Insbesondere gilt $a_{ii} = -\overline{a}_{ii} = -\mathrm{Re}(a_{ii}) + \mathrm{Im}(a_{ii})$. Daraus folgt $\mathrm{Re}(a_{ii}) = 0$ also $a_{ii} \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.