Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Mirjam Dür
Dipl. Math. Stefan Bundfuss

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2006
9. Mai 2006

2. Übungsblatt zur „Lineare Algebra II für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G9 (Eigenwerte & Eigenräume komplex)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne alle reellen Eigenwerte von A sowie die dazugehörigen Eigenräume. Ist A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

(b) Berechne alle komplexen Eigenwerte von A sowie die dazugehörigen Eigenräume. Ist A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?

Aufgabe G10 (Fibonaccizahlen & Eigenwerte)

Die Folge der Fibonaccizahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist rekursiv definiert:

$$a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2$$

und $a_0 = 0$ sowie $a_1 = 1$.

Im Folgenden soll eine explizite Formel für die Folgenglieder a_n gefunden werden.

(a) Finde eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sodaß für alle $n \geq 2$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$$

gilt.

(b) Zeige, daß für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt.

(c) Berechne Matrizen $D, T, T^{-1} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sodaß

$$A = TDT^{-1}$$

gilt.

(d) Zeige, daß für alle $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = TD^nT^{-1}$$

gilt.

(e) Bestimme nun eine explizite Formel für a_n.

Aufgabe G11 (Differentialgleichungen & Eigenwerte)

Sei $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $v_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\dot{v} = Av, \quad v(0) = v_0$$

die Lösung $v(t) = e^{At}v_0$.

Für die Exponentialfunktion gelten die folgenden Aussagen:

- Sei $D, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und T invertierbar. Dann gilt

$$e^{TDT^{-1}} = Te^DT^{-1}.$$

- Sei

$$D := \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

  Dann gilt

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{d_n} \end{pmatrix}.$$

Löse das Anfangswertproblem

$$\dot{v} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{=:A} v, \quad v(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G12 (Polynomdivision)

Bestimme alle Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = x^4 - 2x^3 - 2x - 1.$$

Es sei bekannt, daß i eine Nullstelle des Polynoms ist.

Beachte: Es gilt die folgende Aussage:

Ist p ein Polynom mit *reellen* Koeffizienten und $x_0 = a + bi$ eine komplexe Nullstelle von p, dann ist auch $\overline{x}_0 = a - bi$ eine Nullstelle von p.

Hausübung

Aufgabe H9 (Eigenwerte & Eigenräume komplex) (6 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2+i & -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ 1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ -1 & \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \end{pmatrix}.$$

Berechne alle komplexen Eigenwerte von A sowie die dazugehörigen Eigenräume. Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe H10 (Komplexe Eigenwerte reeller Matrizen) (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit *reellen* Einträgen und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A sowie $v \in \mathbb{C}^n$ ein dazugehöriger Eigenvektor.

Zeige, daß dann auch $\overline{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda}$ ist.

Tipp: Betrachte jeweils Real- und Imaginärteil.

Aufgabe H11 (Der harmonische Oszillator) (8 Punkte)

Die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators lautet

$$m\ddot{x} + kx = 0,$$

wobei $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und $m, k > 0$ reelle Konstanten sind. Setzt man $v := \dot{x}$, erhält man ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{m} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix}$$

Bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystem, das heißt berechne

$$\begin{pmatrix} v(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} v_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

für beliebige Anfangswerte $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ und zur beliebigen Zeit $t \in \mathbb{R}$.

Beachte: Auch wenn in der Rechnung komplexe Werte auftauchen, muß das Endergebnis reell sein.

Tipp: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Aufgabe H12 (Polynomdivision) (6 Punkte)

Bestimme alle Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2.$$

Es sei bekannt, daß $1 + i$ eine Nullstelle des Polynoms ist.

Beachte: Es gilt die folgende Aussage:

Ist p ein Polynom mit *reellen* Koeffizienten und $x_0 = a + bi$ eine komplexe Nullstelle von p, dann ist auch $\overline{x}_0 = a - bi$ eine Nullstelle von p.

Sprechstunden

Speziell zur Veranstaltung "Lineare Algebra II für Physiker" werden die folgenden Sprechstunden angeboten:

Dozent	Zeit	Ort	Bemerkung
Prof. Dr. M. Dür	Mittwoch 15:30-16:30 Uhr	S2 15/223	
Dipl. Math. Stefan Bundfuss	Freitag 13:25-14:20 Uhr	S2 15/244 (LZM)	
Matthias Rosenkranz	Mittwoch 16:30-17:30 Uhr	S2 15/415 oder S2 15/417	Die erste Sprechstunde findet am 26. April statt und danach alle zwei Wochen.

Außerdem steht im Lernzentrum Mathematik (LZM) im Raum S2 15/244 von Montag bis Donnerstag von 8:50 Uhr bis 16:10 Uhr und am Freitag von 8:50 Uhr bis 15:15 Uhr ein wissenschaftlicher Mitarbeiter für Fragen zur Verfügung.