Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Mirjam Dür
Dipl. Math. Stefan Bundfuss

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
26. Mai 2006

2. Übungsblatt zur „Lineare Algebra II für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G9 (Eigenwerte & Eigenräume komplex)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne alle reellen Eigenwerte von A sowie die dazugehörigen Eigenräume. Ist A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

(b) Berechne alle komplexen Eigenwerte von A sowie die dazugehörigen Eigenräume. Ist A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?

Lösung: Das charakteristische Polynom von A lautet:

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= \det \begin{pmatrix} \frac{3}{2}-\lambda & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix} \overset{III+I}{=} \det \begin{pmatrix} \frac{3}{2}-\lambda & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda & -\frac{1}{2} \\ 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &\overset{\substack{\text{Entwicklung} \\ \text{nach der} \\ \text{2. Spalte}}}{=} \tfrac{1}{2}(1-\lambda) + \tfrac{1}{2}(1-\lambda) + (1-\lambda)((\tfrac{3}{2}-\lambda)(1-\lambda) - \tfrac{1}{2}(1-\lambda)) \\ &= (1-\lambda)(1+(1-\lambda)^2) = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+2) \end{aligned}$$

und besitzt die Nullstellen 1, $1+i$ und $1-i$.

(a) Der einzige reelle Eigenwert von A ist 1. Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist

$$\ker(A-I) = \ker \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \overset{\substack{III+I \\ II-I}}{=} \ker \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Da der Eigenraum zum einzigen reellen Eigenwert nur die Dimension eins hat, ist A nicht über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.

(b) Die komplexen Eigenwerte von A sind 1, $1+i$ und $1-i$.
Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist nach Teil (a)

$$\left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}.$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $1+i$ ist

$$\begin{aligned} \ker(A-(1+i)I) &= \ker \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-i & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -i & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}-i \end{pmatrix} \overset{\substack{I+III \\ II+III}}{=} \ker \begin{pmatrix} -i & 0 & -i \\ 0 & 1-i & -1-i \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}-i \end{pmatrix} \\ &\overset{I-2iIII}{=} \ker \begin{pmatrix} 0 & -2i & -2 \\ 0 & 1-i & -1-i \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}-i \end{pmatrix} \overset{II+\frac{1-i}{2i}III}{=} \ker \begin{pmatrix} 0 & -2i & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}-i \end{pmatrix} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $1-i$ ist

$$\begin{aligned} \ker(A-(1-i)I) &= \ker \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+i & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & i & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}+i \end{pmatrix} \overset{\substack{I+III \\ II+III}}{=} \ker \begin{pmatrix} i & 0 & i \\ 0 & 1+i & -1+i \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}+i \end{pmatrix} \\ &\overset{I+2iIII}{=} \ker \begin{pmatrix} 0 & 2i & -2 \\ 0 & 1+i & -1+i \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}+i \end{pmatrix} \overset{II-\frac{1+i}{2i}III}{=} \ker \begin{pmatrix} 0 & 2i & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}+i \end{pmatrix} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

Alternativ hätte der letzte Eigenraum auch sehr einfach mit der Aussage aus Aufgabe H10 bestimmt werden können.
Da A drei paarweise verschiedene Eigenwerte besitzt, ist A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

Aufgabe G10 (Fibonaccizahlen & Eigenwerte)

Die Folge der Fibonaccizahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist rekursiv definiert:

$$a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2$$

und $a_0 = 0$ sowie $a_1 = 1$.

Im Folgenden soll eine explizite Formel für die Folgenglieder a_n gefunden werden.

(a) Finde eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sodaß für alle $n \geq 2$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$$

gilt.

(b) Zeige, daß für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt.

(c) Berechne Matrizen $D, T, T^{-1} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sodaß

$$A = TDT^{-1}$$

gilt.

(d) Zeige, daß für alle $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = TD^nT^{-1}$$

gilt.

(e) Bestimme nun eine explizite Formel für a_n.

Lösung:

(a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für alle $n \geq 2$

$$A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(b) Es soll zunächst mittels vollständiger Induktion über n gezeigt werden, dafür alle $n \geq 2$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

gilt.

Induktionsanfang: Sei $n = 2$. Dann folgt aus Teil (a) unmittelbar

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Induktionsschluss: Für eine beliebiges aber festes $n \geq 2$ gelte die Gleichung 1. Dann folgt

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \overset{\text{Teil (a)}}{=} A \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \overset{IA}{=} AA^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also gilt die Gleichung 1 auch für $n + 1$.

Damit ist die Aussage für $n \geq 2$ gezeigt. Offensichtlich gilt sie auch für $n = 0, 1$.

(c) Zunächst sollen die Eigenwerte von A bestimmt werden. Das charakteristische Polynome lautet:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

und besitzt die Nullstellen $\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Folglich gilt

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

Zum Bestimmen der Transformationsmatrix T sind die Eigenräume zu berechnen:

$$\ker(A-\lambda_{1,2}I)=\ker\begin{pmatrix}\frac{1\mp\sqrt{5}}{2} & 1\\ 1 & -\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\overset{II+\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}I}{=}\ker\begin{pmatrix}\frac{1\mp\sqrt{5}}{2} & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\left\{a\begin{pmatrix}1\\ -\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\mid a\in\mathbb{R}\right\}.$$

Daraus folgt, daß

$$T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}$$

eine mögliche Wahl für T ist.
Es muß noch die Inverse von T berechnet werden:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 & 1\end{array}\right)\overset{II+\frac{1-\sqrt{5}}{2}I}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & \sqrt{5} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1\end{array}\right)\overset{\substack{-\frac{1}{\sqrt{5}}II\\ I-II}}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{array}\right)$$

Folglich gilt

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}.$$

(d) Es gilt

$$A^n=(TDT^{-1})^n=\underbrace{TD\overbrace{T^{-1}\cdot T}^{=I}DT^{-1}\cdot\ldots\cdot TDT^{-1}}_{n\text{-mal}}=TD^nT^{-1}.$$

(e) Aus den vorherigen Aufgabenteilen folgt

$$\begin{aligned}a_n&=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}TD^nT^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}-\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0\\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\\ -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1-5}{4}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{1-5}{4}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).\end{aligned}$$

Diese Formel war schon dem französischen Mathematiker Jacques Philippe Marie Binet 1843 bekannt, wobei er sie vermutlich auf anderem Wege hergeleitet hat.

Die Fibonaccizahlen beschreiben die Dynamik eines sehr einfachen Populationsmodells. Die Zahl a_n ist hierbei die Anzahl der Indiviuen nach n Zeitschritten. Dabei wird davon ausgegangen, daß keine Individuen sterben und jedes Individuum in jedem Zeitschritt ein Nachkommen hat, wenn es mindestens zwei Zeitschritte alt ist.

Aufgabe G11 (Differentialgleichungen & Eigenwerte)

Sei $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $v_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\dot{v} = Av, \quad v(0) = v_0$$

die Lösung $v(t) = e^{At}v_0$.

Für die Exponentialfunktion gelten die folgenden Aussagen:

- Sei $D, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und T invertierbar. Dann gilt

$$e^{TDT^{-1}} = Te^D T^{-1}.$$

- Sei

$$D := \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

  Dann gilt

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{d_n} \end{pmatrix}.$$

Löse das Anfangswertproblem

$$\dot{v} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{=:A} v, \quad v(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Um e^{At} zu bestimmen, müssen Matrizen T und D bestimmt werden, sodaß $A = TDT^{-1}$ gilt. Dazu werden zunächst die Eigenwerte von A bestimmt. Das charakteristische Polynome lautet:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(1+\lambda)(1-\lambda)$$

und besitzt die Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Folglich gilt

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zum Bestimmen der Transformationsmatrix T sind die Eigenräume zu berechnen:

$$E_1 = \ker(A - \lambda_1 I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\},$$

$$E_2 = \ker(A - \lambda_2 I) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Daraus folgt, daß

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

eine mögliche Wahl für T ist.

Es muß noch die Inverse von T berechnet werden:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{II-I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Folglich gilt

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} v(t) = e^{At}v(0) = Te^{Dt}T^{-1}v(0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t + e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 2\cosh(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe G12 (Polynomdivision)

Bestimme alle Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = x^4 - 2x^3 - 2x - 1.$$

Es sei bekannt, daß i eine Nullstelle des Polynoms ist.

Beachte: Es gilt die folgende Aussage:

Ist p ein Polynom mit *reellen* Koeffizienten und $x_0 = a + bi$ eine komplexe Nullstelle von p, dann ist auch $\overline{x}_0 = a - bi$ eine Nullstelle von p.

Lösung: Da es sich um ein reelles Polynom handelt, ist auch $-i$ eine Nullstelle von p. Folglich ist $(x - i)(x - (-i)) = x^2 + 1$ ein Teiler von p. Eine Polynomdivision ergibt

$$\begin{array}{l} (x^4 - 2x^3 \qquad - 2x - 1) : (x^2 + 1) = x^2 - 2x - 1 \\ \underline{-(x^4 + x^2)} \\ \quad - 2x^3 - x^2 - 2x - 1 \\ \quad - \underline{(- 2x^3 - 2x)} \\ \qquad\qquad -x^2 - 1 \\ \qquad\qquad - \underline{(-x^2 - 1)} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Die Nullstellen von $x^2 - 2x - 1$ sind $1 \pm \sqrt{2}$. Also besitzt p die Nullstellen $1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, i, -i$.

Hausübung

Aufgabe H9 (Eigenwerte & Eigenräume komplex) (6 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2+i & -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ 1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ -1 & \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \end{pmatrix}.$$

Berechne alle komplexen Eigenwerte von A sowie die dazugehörigen Eigenräume. Ist A diagonalisierbar?

Lösung: Das charakteristische Polynom von A lautet:

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 2+i-\lambda & -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ 1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\lambda & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ -1 & \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\lambda \end{pmatrix} \\
&\overset{I-II}{=} \det \begin{pmatrix} 1+i-\lambda & -1-i+\lambda & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\lambda & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ -1 & \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\lambda \end{pmatrix} \\
&\overset{III+II}{=} \det \begin{pmatrix} 1+i-\lambda & -1-i+\lambda & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\lambda & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ 0 & 2-\lambda & -\lambda \end{pmatrix} \\
&\overset{\substack{\text{Entwicklung} \\ \text{nach der} \\ \text{1. Zeile}}}{=} (1+i-\lambda)(-\lambda(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i-\lambda)-(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)(2-\lambda))+(1+i-\lambda)(-\lambda) \\
&= (1+i-\lambda)(\lambda^2-\lambda(2-i)+1-i)
\end{aligned}$$

und besitzt die Nullstellen 1, $1+i$ und $1-i$. Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist

$$\begin{aligned}
\ker(A-I) &= \ker \begin{pmatrix} 1+i & -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ 1 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ -1 & \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \end{pmatrix} \overset{\substack{III-iI \\ II-I}}{=} \ker \begin{pmatrix} 1+i & -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ -i & i & 0 \\ -i & i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $1+i$ ist

$$\begin{aligned}
\ker(A-(1+i)I) &= \ker \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ 1 & -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ -1 & \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i \end{pmatrix} \overset{\substack{II-I \\ III+II}}{=} \ker \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & -1-i \end{pmatrix} \\
&= \left\{ a \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}.
\end{aligned}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $1-i$ ist

$$\begin{aligned}
\ker(A-(1-i)I) &= \ker \begin{pmatrix} 1+2i & -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ 1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ -1 & \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \end{pmatrix} \overset{\substack{II-I \\ III-I}}{=} \ker \begin{pmatrix} 1+2i & -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ -2i & 2i & 0 \\ -2-2i & 2+2i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}.
\end{aligned}$$

Da A drei paarweise verschiedene Eigenwerte besitzt, ist A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

Aufgabe H10 (Komplexe Eigenwerte reeller Matrizen) (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit *reellen* Einträgen und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A sowie $v \in \mathbb{C}^n$ ein dazugehöriger Eigenvektor.

Zeige, daß dann auch $\overline{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda}$ ist.

Tipp: Betrachte jeweils Real- und Imaginärteil.

Lösung: Für $z = a + bi \in \mathbb{C}$ bezeichne $\mathrm{Re}(z) = a$ den Realteil und $\mathrm{Im}(z) = b$ den Imaginärteil von z.

Es gilt

$$\begin{aligned} A\mathrm{Re}(v) + A\mathrm{Im}(v)i = Av = \lambda v &= (\mathrm{Re}(\lambda) + \mathrm{Im}(\lambda)i)(\mathrm{Re}(v) + \mathrm{Im}(v)i) \\ &= \mathrm{Re}(\lambda)\mathrm{Re}(v) - \mathrm{Im}(\lambda)\mathrm{Im}(v) + (\mathrm{Re}(\lambda)\mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(\lambda)\mathrm{Re}(v))i. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} A\mathrm{Re}(v) &= \mathrm{Re}(\lambda)\mathrm{Re}(v) - \mathrm{Im}(\lambda)\mathrm{Im}(v), \\ A\mathrm{Im}(v) &= \mathrm{Re}(\lambda)\mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(\lambda)\mathrm{Re}(v). \end{aligned}$$

Für $\overline{v} = \mathrm{Re}(v) - \mathrm{Im}(v)i$ gilt

$$\begin{aligned} A\overline{v} &= A\mathrm{Re}(v) - A\mathrm{Im}(v)i = \mathrm{Re}(\lambda)\mathrm{Re}(v) - \mathrm{Im}(\lambda)\mathrm{Im}(v) - (\mathrm{Re}(\lambda)\mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(\lambda)\mathrm{Re}(v))i \\ &= (\mathrm{Re}(\lambda) - \mathrm{Im}(\lambda)i)(\mathrm{Re}(v) - \mathrm{Im}(v)i) = \overline{\lambda}\overline{v}, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Aufgabe H11 (Der harmonische Oszillator) (8 Punkte)

Die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators lautet

$$m\ddot{x} + kx = 0,$$

wobei $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und $m, k > 0$ reelle Konstanten sind. Setzt man $v := \dot{x}$, erhält man ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{m} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix}$$

Bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystem, das heißt berechne

$$\begin{pmatrix} v(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} v_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

für beliebige Anfangswerte $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ und zur beliebigen Zeit $t \in \mathbb{R}$.

Beachte: Auch wenn in der Rechnung komplexe Werte auftauchen, muß das Endergebnis reell sein.

Tipp: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Lösung: Um e^{At} zu bestimmen, müssen Matrizen T und D bestimmt werden, sodaß $A = TDT^{-1}$ gilt. Dazu werden zunächst die Eigenwerte von A bestimmt. Das charakteristische Polynome lautet:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{k}{m} \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \frac{k}{m}$$

und besitzt die Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$. Mit der Bezeichnung $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ gilt

$$D = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix}.$$

Zum Bestimmen der Transformationsmatrix T sind die Eigenräume zu berechnen:

$$E_{1,2} = \ker(A - \lambda_{1,2} I) = \ker \begin{pmatrix} \mp i\omega & -\omega^2 \\ 1 & \mp i\omega \end{pmatrix} = \left\{ a \begin{pmatrix} \pm i\omega \\ 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}$$

Daraus folgt, daß

$$T = \begin{pmatrix} i\omega & -i\omega \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

eine mögliche Wahl für T ist.

Es muß noch die Inverse von T berechnet werden:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} i\omega & -i\omega & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \overset{\substack{\frac{1}{i\omega} I \\ II - I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -\frac{i}{\omega} & 0 \\ 0 & 2 & \frac{i}{\omega} & 1 \end{array} \right) \overset{\substack{\frac{1}{2} II \\ I + II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{i}{2\omega} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{i}{2\omega} & \frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Folglich gilt

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2\omega} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2\omega} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} v(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} v_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = Te^{Dt}T^{-1} \begin{pmatrix} v_0 \\ x_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i\omega & -i\omega \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i}{2\omega} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2\omega} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ x_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i\omega & -i\omega \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i}{2\omega} v_0 + \frac{1}{2} x_0 \\ \frac{i}{2\omega} v_0 + \frac{1}{2} x_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i\omega & -i\omega \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega t}(-\frac{i}{2\omega} v_0 + \frac{1}{2} x_0) \\ e^{-i\omega t}(\frac{i}{2\omega} v_0 + \frac{1}{2} x_0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_0 \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} + x_0 \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2} i\omega \\ \frac{v_0}{\omega} \cdot \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} + x_0 \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_0 \cos(\omega t) - \omega x_0 \sin(\omega t) \\ \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + x_0 \cos(\omega t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems. Die Zahl ω wird auch als Eigenfrequenz des harmonischen Oszillators bezeichnet.

Aufgabe H12 (Polynomdivision) (6 Punkte)

Bestimme alle Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2.$$

Es sei bekannt, daß $1+i$ eine Nullstelle des Polynoms ist.

Beachte: Es gilt die folgende Aussage:

Ist p ein Polynom mit *reellen* Koeffizienten und $x_0 = a + bi$ eine komplexe Nullstelle von p, dann ist auch $\overline{x}_0 = a - bi$ eine Nullstelle von p.

Lösung: Da es sich um ein reelles Polynom handelt, ist auch $1-i$ eine Nullstelle von p. Folglich ist $(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2 - 2x + 2$ ein Teiler von p. Eine Polynomdivision ergibt

$$\begin{array}{l}
(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2) : (x^2 - 2x + 2) = x^2 - x - 1 \\
\underline{-(x^4 - 2x^3 + 2x^2)} \\
\qquad - x^3 + x^2 - 2 \\
\qquad - \underline{(- x^3 + 2x^2 - 2x)} \\
\qquad\qquad -x^2 + 2x^2 - 2 \\
\qquad\qquad - \underline{(-x^2 + 2x^2 - 2)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Die Nullstellen von $x^2 - x - 1$ sind $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Also besitzt p die Nullstellen $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1+i, 1-i$.