Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Mirjam Dür
Dipl. Math. Stefan Bundfuss

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2005/2006
21. April 2006

1. Übungsblatt zur „Lineare Algebra II für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G5 (Eigenwerte & Eigenräume geometrisch)

Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängige Vektoren. Wie sehen die reellen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der folgenden linearen Abbildungen aus:

(a) Spiegelung an der von u und v aufgespannten Ebene,

(b) Projektion auf die von u und v aufgespannte Ebene,

(c) Drehung um die Achse, die von v erzeugt wird.

Aufgabe G6 (Eigenwerte orthogonaler Abbildungen)

Sei φ eine orthogonale Abbildung und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von φ.

Welche Werte für λ sind möglich? Gib für jeden möglichen Wert von λ eine orthogonale Abbildung an, die diesen Eigenwert besitzt.

Aufgabe G7 (Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit)

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimme das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimme alle Eigenwerte und Eigenräume.

(c) Ist A diagonalisierbar? Falls ja, gib eine Diagonalmatrix D und eine Matrix T an, sodaß $T^{-1}AT = D$ gilt.

Aufgabe G8 (Drehungen)

Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ist eine Drehung um eine Achse. Bestimme die Richtung der Drehachse und den Drehwinkel.

Hausübung

Aufgabe H5 (Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit) (10 Punkte)

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimme das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimme alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

(c) Ist A diagonalisierbar? Falls ja, gib eine Diagonalmatrix D und eine Matrix T an, sodaß $T^{-1}AT = D$ gilt.

Aufgabe H6 (Eigenwerte ähnlicher Matrizen) (4 Punkte)

Zeige, daß ähnliche Matrizen die gleichen Eigenwerte besitzen.

Zur Erinnerung: Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißen *ähnlich*, falls es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, sodaß $B = S^{-1}AS$ gilt.

Aufgabe H7 (Eigenwerte & Eigenräume transponierter Matrizen) (8 Punkte)

Sei A eine quadratische Matrix.

(a) Beweise oder widerlege, daß A und A^T die gleichen Eigenwerte haben.

(b) Beweise oder widerlege, daß A und A^T die gleichen Eigenräume haben.

Aufgabe H8 (Eigenwerte & Eigenräume) (10 Punkte)

(a) Sei v ein Eigenvektor der invertierbaren Matrix A zum Eigenwert λ. Zeige, daß dann v auch Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$ ist.

(b) Sei v ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ und s ein Skalar. Zeige, daß v ein Eigenvektor von $A - sI$ zum Eigenwert $\lambda - s$ ist.

(c) Bestimme die Eigenwerte und Basen der Eigenräume von den folgenden drei Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}, \quad B := \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$