Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Mirjam Dür
Dipl. Math. Stefan Bundfuss

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2005/2006
16. Mai 2006

1. Übungsblatt zur „Lineare Algebra II für Physiker"

Gruppenübung

Aufgabe G5 (Eigenwerte & Eigenräume geometrisch)

Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängige Vektoren. Wie sehen die reellen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der folgenden linearen Abbildungen aus:

(a) Spiegelung an der von u und v aufgespannten Ebene,

(b) Projektion auf die von u und v aufgespannte Ebene,

(c) Drehung um die Achse, die von v erzeugt wird.

Lösung: Sei E die von u und v aufgespannte Ebene.

(a) Da alle Vektoren aus E durch die Spiegelung nicht verändert werden, sind diese Eigenvektoren zum Eigenwert 1 und E der zugehörige Eigenraum. Vektoren, die senkrecht zur Ebene sind, werden durch die Spiegelung auf ihr negatives abgebildet. Folglich sind sie Eigenvektoren zum Eigenwert -1 und $E^\perp$ ist der zugehörige Eigenraum.

(b) Da alle Vektoren aus E durch die Projektion nicht verändert werden, sind diese Eigenvektoren zum Eigenwert 1 und E der zugehörige Eigenraum. Vektoren, die senkrecht zur Ebene sind, werden durch die Projektion auf den Nullvektor abgebildet. Folglich sind sie Eigenvektoren zum Eigenwert 0 und $E^\perp$ ist der zugehörige Eigenraum.

(c) Sei G die von v erzeugte Gerade. Da alle Vektoren auf der Drehachse durch die Drehung nicht verändert werden sind diese Eigenvektoren zum Eigenwert 1 und G der zugehörige Eigenraum.

Sei $\alpha \in [0, 2\pi)$ der Drehwinkel.

Für $\alpha = 0$ handelt es sich um die Identität. Folglich sind alle Vektoren Eigenvektoren zum Eigenwert 1 und $\mathbb{R}^3$ der zugehörige Eigenraum.

Für $\alpha = \pi$ handelt es sich um eine Spiegelung an der Geraden. Folglich sind alle Vektoren, die senkrecht zu G sind, Eigenvektoren zum Eigenwert -1 und $G^\perp$ der zugehörige Eigenraum.

Für alle anderen α gibt es keine Eigenvektoren außerhalb der Drehachse.

Aufgabe G6 (Eigenwerte orthogonaler Abbildungen)

Sei φ eine orthogonale Abbildung und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von φ.

Welche Werte für λ sind möglich? Gib für jeden möglichen Wert von λ eine orthogonale Abbildung an, die diesen Eigenwert besitzt.

Lösung: Sei v ein zu λ gehöriger Eigenvektor. Da orthogonale Abbildungen die Länge erhalten, gilt

$$\|v\| = \|\varphi(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|.$$

Folglich ist $\lambda = \pm 1$.

Die orthogonale Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v$$

hat offensichtlich die Eigenwerte 1 und -1.

Aufgabe G7 (Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit)

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimme das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimme alle Eigenwerte und Eigenräume.

(c) Ist A diagonalisierbar? Falls ja, gib eine Diagonalmatrix D und eine Matrix T an, sodaß $T^{-1}AT = D$ gilt.

Lösung:

(a) Für das charakteristische Polynom von A gilt

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 & -3 \\ -2 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} \overset{III+II}{=} \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 & -3 \\ -2 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-1-\lambda) \cdot ((-1-\lambda)(2-\lambda) + 2(2-\lambda)) + 2 \cdot (-3(2-\lambda) + 3(2-\lambda)) \\
&= -(2-\lambda)(1+\lambda)(1-\lambda).
\end{aligned}$$

Also ist $P_A(\lambda) = -(1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$.

(b) Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, also $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

Die zu λ_i gehörenden Eigenräume ergeben sich als Lösungsraum der Gleichungssysteme $(A - \lambda_i I)v_i = 0$, $i = 1, 2, 3$.
Sei $\lambda_1 = -1$. In diesem Fall ist $(A + I)v_1 = 0$ zu lösen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{III+I+II \\ -\frac{1}{3}I \\ -\frac{1}{2}II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also ist

$$E_1 = \left\{ \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

der Eigenraum zum Eigenwert -1.
Sei $\lambda_2 = 1$. Hier ist $(A - I)v_2 = 0$ zu lösen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Somit ist

$$E_2 = \left\{ \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

der Eigenraum zum Eigenwert 1.
Sei $\lambda_3 = 2$. Jetzt ist $(A - 2I)v_3 = 0$ zu betrachten.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also ist

$$E_3 = \left\{ \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

der Eigenraum zum Eigenwert 2.

(c) Die Matrix A ist diagonalisierbar, da alle Eigenwerte verschieden sind. Die gesuchte Transformationsmatrix ist gerade die Matrix deren Spalten die Eigenvektoren von A sind:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G8 (Drehungen)

Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ist eine Drehung um eine Achse. Bestimme die Richtung der Drehachse und den Drehwinkel.

Lösung: Bei einer Drehung sind die Vektoren der Drehachse dadurch ausgezeichnet, daß sie durch die Drehung nicht verändert werden, daß also $Ax = x$ gilt. Das heißt x ist Eigenvektor zum Eigenwert 1. Wir bestimmen diese Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3}-1 & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \overset{\substack{III+I \\ 4I \\ 4II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} \sqrt{3}-2 & \sqrt{2} & -\sqrt{3}+2 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3}-4 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{I+(\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}})}{\leadsto} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}(8-4\sqrt{3}) & 0 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3}-4 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $(1,0,1)^T$ ein solcher Eigenvektor und damit ist $(1,0,1)^T$ die Richtung der Drehachse.

Um den Drehwinkel zu bestimmen, bilden wir einen zur Drehachse senkrechten Vektor. z.B. $x = (0,1,0)^T$ mit der Drehung ab. Es gilt

$$Ax = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

und der Winkel α zwischen x und Ax ist der Drehwinkel:

$$\cos(\alpha) = \frac{x \cdot Ax}{||x|| \cdot ||Ax||} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

also gilt $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Hausübung

Aufgabe H5 (Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit) (10 Punkte)

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimme das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimme alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

(c) Ist A diagonalisierbar? Falls ja, gib eine Diagonalmatrix D und eine Matrix T an, sodaß $T^{-1}AT = D$ gilt.

Lösung:

(a) Es gilt $\det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(1-\lambda)^2$, also $p_A(\lambda) = (\lambda - 4)(1-\lambda)^2$.

(b) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$, als zugehörige Eigenräume berechnet man

$$E_1 = \left\{ \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}, \qquad E_2 = \left\{ \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

(c) Die Matrix ist nicht diagonalisierbar, da die Summe der Dimensionen der Eigenräume zwei ist und nicht drei.

Aufgabe H6 (Eigenwerte ähnlicher Matrizen) (4 Punkte)

Zeige, daß ähnliche Matrizen die gleichen Eigenwerte besitzen.

Zur Erinnerung: Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißen *ähnlich*, falls es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, sodaß $B = S^{-1}AS$ gilt.

Lösung: Seien A und B ähnlich, das heißt es gibt eine invertierbare Matrix S, sodaß $B = S^{-1}AS$ gilt. Dann gilt für das charakteristische Polynome

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) = \det(S^{-1}AS - \lambda I) = \det(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}IS) = \det(S^{-1}(A - \lambda I)S) \\ &= \underbrace{\det(S^{-1})}_{=\frac{1}{\det(S)}} \det(A - \lambda I) \det(S) = \det(A - \lambda I) = P_A(\lambda). \end{aligned}$$

Da A und B dasselbe charakteristische Polynom besitzen, haben sie auch die gleichen Eigenwerte.

Aufgabe H7 (Eigenwerte & Eigenräume transponierter Matrizen) (8 Punkte)

Sei A eine quadratische Matrix.

(a) Beweise oder widerlege, daß A und A^T die gleichen Eigenwerte haben.

(b) Beweise oder widerlege, daß A und A^T die gleichen Eigenräume haben.

Lösung:

(a) Sei λ Eigenwert von A. Dann ist $\det(A - \lambda I) = 0$. Da die Determinante invariant bzgl. Transponieren ist, gilt damit $\det(A-\lambda I) = \det(A-\lambda I)^T = 0$. Es ist $(A-\lambda I)^T = A^T-(\lambda I)^T = (A^T - \lambda I)^T = A^T - \lambda I$. Somit ist $\det(A^T - \lambda I) = 0$ und λ ist auch Eigenwert von A^T.

(b) Die Aussage lässt sich durch folgendes Gegenbeispiel widerlegen. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

dann hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 1 + 2 = 3$ und $\lambda_2 = 1 - 3 = -2$. Zu diesen gehören die Eigenräume

$$U_{\lambda_1} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}, \quad U_{\lambda_2} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es hat

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

zwar auch die Eigenwerte $\lambda = \frac{1\pm 5}{2}$, also $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$, aber die Eigenräume sind

$$U_{\lambda_1} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}, \quad U_{\lambda_2} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe H8 (Eigenwerte & Eigenräume) (10 Punkte)

(a) Sei v ein Eigenvektor der invertierbaren Matrix A zum Eigenwert λ. Zeige, daß dann v auch Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$ ist.

(b) Sei v ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ und s ein Skalar. Zeige, daß v ein Eigenvektor von $A - sI$ zum Eigenwert $\lambda - s$ ist.

(c) Bestimme die Eigenwerte und Basen der Eigenräume von den folgenden drei Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}, \quad B := \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Sei λ Eigenwert von A und v ein dazugehöriger Eigenvektor. Dann gilt $Av = \lambda v$. Da A invertierbar ist, existiert A^{-1} und wir erhalten durch eine Multiplikation von links: $v = \lambda A^{-1} v$. Durch Multiplikation mit $\frac{1}{\lambda}$ ergibt sich dann $A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$ (es ist $\lambda \neq 0$ da ansonsten die Dimension des Kernes von A mindestens eins wäre und daher A nicht invertierbar). Also ist v Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$.

(b) Aus $Av = \lambda v$ und $sIv = sv$ erhält man durch Subtraktion: $Av - sIv = \lambda v - sv$. Durch Ausklammern ergibt sich nun $(A - sI)v = (\lambda - s)v$, also ist v ein Eigenvektor von $A - sI$ zum Eigenwert $\lambda - s$.

(c) Das charakteristische Polynom von A ist

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 2 & 3 \\ -2 & 3-\lambda & 2 \\ -4 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0.$$

Dieses Polynom hat die Nullstellen $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, die Eigenwerte von A. Durch Lösen der drei homogenen Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} -2-\lambda_j & 2 & 3 \\ -2 & 3-\lambda_j & 2 \\ -4 & 2 & 5-\lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3$$

erhält man als Basisvektoren der drei Eigenräume $U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, U_{\lambda_3}$ die Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ für } U_{\lambda_1}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } U_{\lambda_2}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ für } U_{\lambda_3}.$$

Da A invertierbar ist, sind nach (a) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = \frac{1}{3}$ die Eigenwerte von A^{-1}. Die Basen der Eigenräume sind die gleichen wie für A, ebenfalls nach (a).

Man erkenne

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = A - 3E_3$$

und erhält aus (b), dass die Eigenwerte nun $\lambda_1 = 1 - 3 = -2, \lambda_2 = 2 - 3 = -1, \lambda_3 = 3 - 3 = 0$ sind, jeweils zugehörige Eigenvektoren aber die gleichen wie von A sind.