Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Mirjam Dür
Dipl. Math. Stefan Bundfuss

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2005/2006
6. April 2006

0. Übungsblatt zur „Lineare Algebra II für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Orthogonale Unterräume)

Sei

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}.$$

Berechne $A^{\perp}$.

Aufgabe G2 (Orthogonale Unterräume)

Seien A, B Teilmengen des Vektorraums V. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) $A \subset B \;\Rightarrow\; B^{\perp} \subset A^{\perp}$,

(b) $A \subset B^{\perp} \;\Leftrightarrow\; B \subset A^{\perp}$.

Aufgabe G3 (Projektion)

(a) Sei U ein endlichdimensionaler Unterraum des Vektorraums V mit Orthonormalbasis $(u_1, \ldots, u_m)$ und

$$\pi : V \to V : v \mapsto \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i \rangle u_i$$

Zeige, daß die Abbildung π eine Projektion ist, das heißt es gelten die folgenden Eigenschaften:

i. π ist linear,
ii. $\pi(v) \in U$ für alle $v \in V$,
iii. $\pi(u) = u$ für alle $u \in U$ und
iv. $\pi \circ \pi = \pi$.

(b) Sei

$$u = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Projiziere den Vektor w auf den von u und v erzeugten Unterraum.

Aufgabe G4 (Orthogonale Abbildungen)

Welche geometrischen Operationen werden durch orthogonale Abbildungen im $\mathbb{R}^2$ beschrieben?

Tipp: Bedenke, daß eine lineare Abbildung eindeutig durch das Bild einer Basis bestimmt ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (Orthogonale Unterräume) (6 Punkte)

Sei

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}.$$

Berechne $(A^\perp)^\perp$.

Aufgabe H2 (Orthogonale Unterräume) (6 Punkte)

Sei A eine Teilmenge des Vektorraums V. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) $A \subset (A^\perp)^\perp$,

(b) $A^\perp = ((A^\perp)^\perp)^\perp$.

Aufgabe H3 (Projektion) (8 Punkte)

(a) Sei U ein endlichdimensionaler Unterraum des Vektorraums V mit Orthonormalbasis $(u_1, \ldots, u_m)$ und

$$\pi : V \to V : v \mapsto \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i \rangle u_i.$$

Zeige, daß für die Abbildung π die folgenden Eigenschaften gelten:

i. $\mathrm{Im}\pi = U$ und $\mathrm{Ker}\, \pi = U^\perp$,

ii. $v - \pi(v) \in U^\perp$ für alle $v \in V$,

iii. $\|v - \pi(v)\| \leq \|v - u\|$ für alle $v \in V$ und $u \in U$ und Gleichheit gilt nur für $u = \pi(v)$,

iv. $\|v - \pi(v)\| = \min_{u \in U}\{\|v - u\|\}$ für alle $v \in V$.

(b) Sei

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Projiziere den Vektor w auf den von u und v erzeugten Unterraum.

Aufgabe H4 (Orthonormale Matrizen) (4 Punkte)

Sei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeige, daß die folgenden zwei Aussagen äquivalent sind:

(a) Die Spalten von Q bilden ein Orthonormalsystem.

(b) Die Matrix Q ist orthogonal.