Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Mirjam Dür
Dipl. Math. Stefan Bundfuss

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2005/2006
28. April 2006

0. Übungsblatt zur „Lineare Algebra II für Physiker"

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Orthogonale Unterräume)

Sei

$$A = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} \right\}.$$

Berechne $A^\perp$.

Lösung: Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} A^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \forall v \in A : \langle x, v\rangle = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \forall v \in A : v^T x = 0\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} x = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Es ist also ein homogenes lineares Gleichungssystem zu lösen. Dazu wird zuerst die obige Matrix in Zeilenstufenform gebracht:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} \overset{\substack{II-4I\\III-7I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{pmatrix} \overset{III-2II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Damit ist $x = \begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^T$ eine Lösung des Gleichungssystem, wenn $x_2 = -2x_3$ und $x_1 = 4x_3 - 3x_3 = x_3$ ist. Daher gilt

$$A^\perp = \left\{ a \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe G2 (Orthogonale Unterräume)

Seien A, B Teilmengen des Vektorraums V. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) $A \subset B \;\Rightarrow\; B^\perp \subset A^\perp$,

(b) $A \subset B^\perp \;\Leftrightarrow\; B \subset A^\perp$.

Lösung:

(a) Sei $x \in B^\perp$ beliebig. Dann gilt nach Definition $\langle x, b\rangle = 0$ für alle $b \in B$. Folglich gilt auch $\langle x, a\rangle = 0$ für alle $a \in A$, da $A \subset B$. Damit ist $x \in A^\perp$ und $B^\perp \subset A^\perp$.

(b) Offensichtlich genügt es $A \subset B^\perp \;\Rightarrow\; B \subset A^\perp$ zu zeigen. Sei $x \in B$ beliebig. Aus $A \subset B^\perp$ folgt, daß $\langle x, a\rangle = 0$ für alle $a \in A$ gilt. Folglich ist $x \in A^\perp$ und damit $B \subset A^\perp$.

Aufgabe G3 (Projektion)

(a) Sei U ein endlichdimensionaler Unterraum des Vektorraums V mit Orthonormalbasis $(u_1, \dots, u_m)$ und

$$\pi : V \to V : v \mapsto \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i\rangle u_i$$

Zeige, daß die Abbildung π eine Projektion ist, das heißt es gelten die folgenden Eigenschaften:

i. π ist linear,

ii. $\pi(v) \in U$ für alle $v \in V$,

iii. $\pi(u) = u$ für alle $u \in U$ und

iv. $\pi \circ \pi = \pi$.

(b) Sei

$$u = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Projiziere den Vektor w auf den von u und v erzeugten Unterraum.

Lösung:

(a) i. Seien $v, w \in V$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\pi(av + bw) = \sum_{i=1}^{m} \langle av + bw, u_i\rangle u_i = a \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i\rangle u_i + b \sum_{i=1}^{m} \langle w, u_i\rangle u_i = a\pi(v) + b\pi(w).$$

Folglich ist π linear.

ii. Für beliebiges $v \in V$ ist $\pi(v)$ eine Linearkombination der Vektoren $u_1, \dots, u_m$, die eine Basis des Untervektorraums U bilden. Folglich gilt $\pi(v) \in U$.

iii. Sei $u \in U$ beliebig. Dann läßt sich u als Linearkombination der Basisvektoren $u_1, \dots, u_m$ darstellen: $u = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j$. Daraus folgt

$$\pi(u) = \pi\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j, u_i \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{\langle u_j, u_i\rangle}_{\substack{=1 \text{ für } i=j, \\ =0 \text{ sonst}}} u_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = u.$$

Bemerkung: Daraus folgt nebenbei, daß $\langle u, u_i\rangle$ gerade die Koordinaten von u bezüglich der Orthonormalbasis $u_1, \dots, u_m$ sind.

iv. Sei $v \in V$ beliebig. Nach Aufgabenteil (a)ii. gilt $\pi(v) \in U$ und nach Aufgabenteil (a)iii. $\pi(\pi(v)) = \pi(v)$.

(b) Es gilt

$$\langle u,u\rangle = 1, \qquad \langle v,v\rangle = 1 \quad \text{und} \qquad \langle u,v\rangle = 0.$$

Folglich ist (u,v) eine Orthonormalbasis des von u und v erzeugten Untervektorraums U. Daher ist

$$\pi : \mathbb{R}^4 \to U : x \mapsto \langle x,u\rangle u + \langle x,v\rangle v$$

die Projektion auf U und es gilt

$$\pi(w) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\\3\end{pmatrix}.$$

Aufgabe G4 (Orthogonale Abbildungen)

Welche geometrischen Operationen werden durch orthogonale Abbildungen im $\mathbb{R}^2$ beschrieben?

Tipp: Bedenke, daß eine lineare Abbildung eindeutig durch das Bild einer Basis bestimmt ist.

Lösung: Sei f eine orthogonale Abbildung und (a,b) eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$. Dann ist f durch die Bilder $f(a)$ und $f(b)$ eindeutig bestimmt. Da orthogonale Abbildungen Längen erhalten, liegen $f(a)$ und $f(b)$ auf dem Einheitskreis. Sei $f(a) = u$ (siehe Abbildung 1), dann ist $f(b) = v$

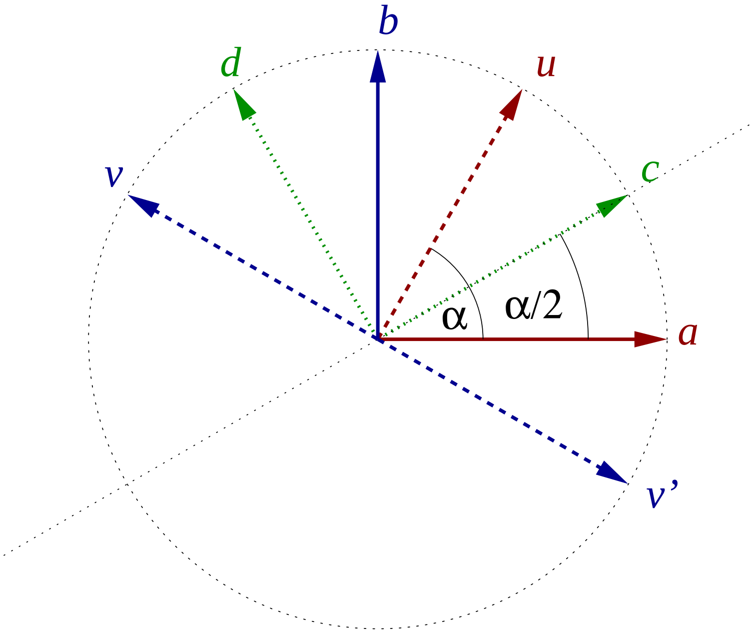

Abbildung 1: Skizze

oder $f(b) = v'$, da orthogonale Abbildungen auch Winkel erhalten. Bezeichne α den Winkel zwischen a und u.

Ist $f(b) = v$, dann beschreibt f offensichtlich eine Drehung um den Winkel α.

Ist $f(b) = v'$, dann ist f eine Drehung um den Winkel α mit anschließender Spiegelung an der durch u erzeugten Gerade. Dies ist aber nichts anderes als eine Spiegelung an der Winkelhalbierenden zwischen a und u. Dies läßt sich leicht einsehen indem man die Orthonormalbasis betrachtet, die aus dem Einheitsvektor c, der die Winkelhalbierende erzeugt, und einen dazu orthogonalen Einheitsvektor d besteht, betrachtet. Dann gilt $f(c) = c$ und entweder $f(d) = d$ oder $f(d) = -d$.

Insgesamt folgt, daß eine orthogonale Abbildung im $\mathbb{R}^2$ entweder eine Drehung oder eine Spiegelung ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (Orthogonale Unterräume) (6 Punkte)

Sei

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}.$$

Berechne $(A^\perp)^\perp$.

Lösung: Aus Aufgabe G1 ist bekannt, daß

$$A^\perp = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$$

gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned} (A^\perp)^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} x = 0\} &= \left\{ \begin{pmatrix} 2a-b \\ a \\ b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{lin}(A). \end{aligned}$$

Aufgabe H2 (Orthogonale Unterräume) (6 Punkte)

Sei A eine Teilmenge des Vektorraums V. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) $A \subset (A^\perp)^\perp$,

(b) $A^\perp = ((A^\perp)^\perp)^\perp$.

Lösung:

(a) Sei $a \in A$. Dann gilt $\langle a, \tilde{a} \rangle = 0$ für alle $\tilde{a} \in A^\perp$. Folglich ist $a \in (A^\perp)^\perp$.

(b) Aus Aufgabenteil (a) folgt $A^\perp \subset ((A^\perp)^\perp)^\perp$.
Sei $a \in ((A^\perp)^\perp)^\perp$. Dann gilt $\langle a, b \rangle = 0$ für alle $b \in (A^\perp)^\perp \supset A$. Folglich ist $a \in A^\perp$.

Aufgabe H3 (Projektion) (8 Punkte)

(a) Sei U ein endlichdimensionaler Unterraum des Vektorraums V mit Orthonormalbasis $(u_1, \ldots, u_m)$ und

$$\pi : V \to V : v \mapsto \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i \rangle u_i.$$

Zeige, daß für die Abbildung π die folgenden Eigenschaften gelten:

i. $\mathrm{Im}\pi = U$ und $\mathrm{Ker}\,\pi = U^\perp$,
ii. $v - \pi(v) \in U^\perp$ für alle $v \in V$,
iii. $\|v - \pi(v)\| \leq \|v - u\|$ für alle $v \in V$ und $u \in U$ und Gleichheit gilt nur für $u = \pi(v)$,
iv. $\|v - \pi(v)\| = \min_{u\in U}\{\|v - u\|\}$ für alle $v \in V$.

(b) Sei

$$u = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

Projiziere den Vektor w auf den von u und v erzeugten Unterraum.

Lösung:

(a) i. Aus Aufgabe G3 Teil (a)ii. folgt $\mathrm{Im}\pi \subset U$ und aus Aufgabenteil (a)iii. $\mathrm{Im}\pi \supset U$ und damit $\mathrm{Im}\pi = U$.
Sei $x \in \mathrm{Ker}\,\pi$. Dann gilt

$$0 = \pi(x) = \sum_{i=1}^{m} \langle x, u_i\rangle u_i.$$

Da $(u_1, \ldots, u_m)$ eine Basis ist, ist $\langle x, u_i\rangle = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$. Sei $u \in U$ beliebig und es gelte $u = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i$. Dann folgt

$$\langle x, u\rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \underbrace{\langle x, u_i\rangle}_{=0} = 0.$$

Daher ist $x \in U^\perp$.
Sei $x \in U^\perp$. Dann gilt $\langle x, u\rangle$ für alle $u \in U$, insbesondere für $u_1, \ldots, u_m$. Folglich ist

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\langle x, u_i\rangle}_{=0} u_i = 0$$

und daher $x \in \mathrm{Ker}\,\pi$.

ii. Für beliebiges $v \in V$ gilt

$$\pi(v - \pi(v)) = \pi(v) - \pi(\pi(v)) = \pi(v) - \pi(v) = 0.$$

Daher ist $v - \pi(v) \in \mathrm{Ker}\,\pi = U^\perp$.

iii. Da $v - \pi(v) \in \mathrm{Ker}\,\pi = U^\perp$ und $\pi(v) - u \in U$, sind $v - \pi(v)$ und $\pi(v) - u$ orthogonal und es gilt der Satz des Pythagoras':

$$\begin{aligned}
& \|v - \pi(v)\|^2 + \|\pi(v) - u\|^2 = \|v - \pi(v) + \pi(v) - u\|^2 = \|v - u\|^2 \\
\Rightarrow \quad & \|v - \pi(v)\|^2 \leq \|v - u\|^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \|v - \pi(v)\| \leq \|v - u\|.
\end{aligned}$$

Gilt $u = \pi(v)$, dann gilt offensichtlich auch $\|v - \pi(v)\| = \|v - u\|$. Ist $u \neq \pi(v)$, dann ist $\|\pi(v) - u\| > 0$ und daher $\|v - \pi(v)\| < \|v - u\|$.

iv. Folgt direkt aus Aufgabenteil (a)iii..

(b) Da u und v weder normiert noch orthogonal sind, muß zunächst eine Orthonormalbasis des von u und v erzeugten Unterraums U bestimmt werden. Mit dem Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt ergeben sich die folgenden Schritte:

$$\begin{aligned}
u_1 &= b_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T \\
v_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T \\
u_2 &= b_2 - \langle b_2, v_1\rangle v_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^T \\
v_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^T
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\pi : \mathbb{R}^4 \to U : x \mapsto \langle x, v_1\rangle v_1 + \langle x, v_2\rangle v_2$$

die Projektion auf U und es gilt

$$\pi(w) = \frac{1}{2}(1+2+3+4)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}(1-2+3-4)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Aufgabe H4 (Orthonormale Matrizen) (4 Punkte)

Sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeige, daß die folgenden zwei Aussagen äquivalent sind:

(a) Die Spalten von Q bilden ein Orthonormalsystem.

(b) Die Matrix Q ist orthogonal.

Lösung: Seien $q_1, \ldots, q_n$ die Spalten von Q. Dann gilt

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} q_1^Tq_1 & \cdots & q_1^Tq_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n^Tq_1 & \cdots & q_n^Tq_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle q_1, q_1\rangle & \cdots & \langle q_1, q_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle q_n, q_1\rangle & \cdots & \langle q_n, q_n\rangle\end{pmatrix}.$$

Daraus folgt sofort die behauptete Äquivalenz.