Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Achim Blumensath
Tobias Löw

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006

Übung 10
Formale Grundlagen der Informatik II

Aufgabe 1

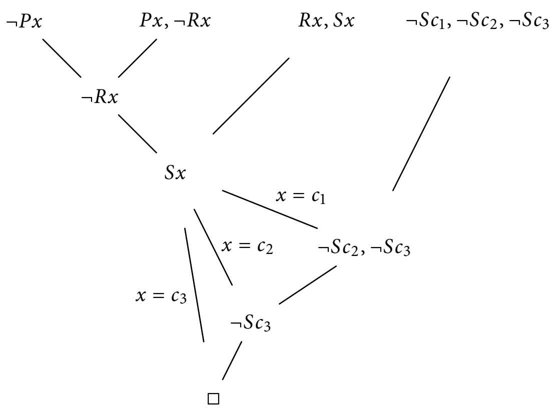
Wir wollen in dieser Aufgabe auf die „Allgemeinere Resolution“ (Skript 5.3) eingehen. Betrachten Sie die Signatur $S := \{c_1, c_2, c_3, R, S, P\}$, wobei die c_i Konstantensymbole und R, S und P jeweils einstellige Relationssymbole sind.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des verallgemeinerten Resolutionsverfahrens, daß die Satzmenge

$$\Phi := \{\forall x \neg Px,\ \forall x(Sx \vee Rx),\ \forall x(\neg Rx \vee Px),\ \neg Sc_1 \vee \neg Sc_2 \vee \neg Sc_3\}$$

unerfüllbar ist.

Lösung.



(b) Worin liegt der Vorteil dieser allgemeineren Resolution im Gegensatz zur Resolution mit Grundinstanzen?

Lösung. Mit der verallgemeinerten Resolution spart man sich Arbeit. Bei der Grundinstanzenresolution muß man, um die leere Klausel abzuleiten, zuerst jeweils für c_1, c_2 und c_3 die Klauseln Sc_1, Sc_2 und Sc_3 herleiten. D. h. man muß dreimal dieselben Resolutionsschritte ausführen, während es bei der verallgemeinerten Resolution reicht, einmal die Klausel Sx herzuleiten.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, daß die folgenden Sequenzen ableitbar sind:

(i) $\exists y \forall x Rxy \vdash \forall x \exists y Rxy$

Lösung.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Rcd \vdash Rcd}\ (\mathrm{Ax})}{Rcd \vdash \exists y Rcy}\ (\exists \mathrm{R})}{\forall x Rxd \vdash \exists y Rcy}\ (\forall \mathrm{L})}{\forall x Rxd \vdash \forall x \exists y Rxy}\ (\forall \mathrm{R})}{\exists y \forall x Rxy \vdash \forall x \exists y Rxy}\ (\exists \mathrm{L})$$

(ii) $\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x\varphi \vee \forall x\psi$, vorausgesetzt, daß $x \notin \mathrm{frei}(\psi)$.

Lösung. Beachte, daß $\psi(c/x) = \psi$ ist, da $x \notin \text{frei}(\psi)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi(c/x) \vdash \varphi(c/x), \psi}\;(\mathrm{Ax}) \qquad \dfrac{}{\psi \vdash \varphi(c/x), \psi}\;(\mathrm{Ax})}{\varphi(c/x) \lor \psi \vdash \varphi(c/x), \psi}\;(\lor\mathrm{L})}{\forall x(\varphi \lor \psi) \vdash \varphi(c/x), \psi}\;(\forall\mathrm{L})}{\forall x(\varphi \lor \psi) \vdash \forall x\varphi, \psi}\;(\forall\mathrm{R})}{\forall x(\varphi \lor \psi) \vdash \forall x\varphi, \forall x\psi}\;(\forall\mathrm{R})}{\forall x(\varphi \lor \psi) \vdash \forall x\varphi \lor \forall x\psi}\;(\lor\mathrm{R})$$

(b) Beweisen Sie die Korrektheit der folgenden Regel:

$$\dfrac{\Gamma, \varphi(c/x) \vdash \Delta, \psi(c/x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x(\varphi \to \psi)} \qquad \text{wobei } c \text{ nicht in } \Gamma, \Delta, \varphi, \psi \text{ vorkommt.}$$

Lösung. Angenommen, die Sequenz $\Gamma, \varphi(c/x) \vdash \Delta, \psi(c/x)$ ist allgemeingültig. Wir müssen zeigen, daß dann auch die Sequenz $\Gamma \vdash \Delta, \forall x(\varphi \to \psi)$ algemeingültig ist. Sei also $\mathfrak{J} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine Interpretation mit $\mathfrak{J} \vDash \Gamma$. Falls $\mathfrak{J} \vDash \bigvee \Delta$, dann sind wir fertig. Angenommen, $\mathfrak{J} \nvDash \bigvee \Delta$. Wir müssen zeigen, daß $\mathfrak{J} \vDash \forall x(\varphi \to \psi)$. Nehmen wir an, daß dies nicht der Fall ist. Dann gibt es ein Element $a \in A$, so daß $(\mathcal{A}, \beta[x \mapsto a]) \vDash \varphi \land \neg\psi$. Sei $\mathfrak{J}'$ die Interpretation, welche der Konstanten c den Wert a zuweist. Da c nicht in $\Gamma, \Delta, \varphi, \psi$ vorkommt, gilt

$$\mathfrak{J}' \vDash \bigwedge \Gamma, \quad \mathfrak{J}' \nvDash \bigvee \Delta, \quad \mathfrak{J}' \vDash \varphi(c/x), \quad \mathfrak{J}' \nvDash \psi(c/x).$$

Also ist $\mathfrak{J}'$ ein Gegenbeispiel zur Allgemeingültigkeit der Regel $\Gamma, \varphi(c/x) \vdash \Delta, \psi(c/x)$. Widerspruch.

(c) Was geht schief, wenn man in den Regeln $(\forall\mathrm{R})$ und $(\exists\mathrm{L})$ die Bedingung wegläßt, daß die Konstante nirgendwo vorkommt? Finden sie eine ungültige Sequenz, die man mit den liberaleren Regeln ableiten kann.

Lösung.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi(c) \vdash \varphi(c)}\;(\mathrm{Ax})}{\varphi(c) \vdash \forall x\varphi(x)}\;(\forall\mathrm{R})}{\exists x\varphi(x) \vdash \forall x\varphi(x)}\;(\exists\mathrm{L})$$