Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Achim Blumensath
Tobias Löw

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006
21. Juni 2006

Formale Grundlagen der Informatik II

Lösungshinweise zum neunten Übungsblatt

Präsenzübungen

(P 1) Anwendung von Kompaktheit

Gegeben sei eine zweistellige Relation $\sim$ und die Aussage

$$\varphi \equiv \forall x\, x \sim x \ \wedge\ \forall x \forall y (x \sim y \rightarrow y \sim x) \ \wedge\ \forall x \forall y \forall z ((x \sim y \wedge y \sim z) \rightarrow x \sim z)$$

die besagt, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(a) Erweitern Sie $\{\varphi\}$ zu einer Satzmenge, die besagt, dass $\sim$ unendlich viele Äquivalenzklassen hat.

LÖSUNG:

Wir definieren für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$\varphi_n \equiv \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg x_i \sim x_j$$

(φ_n besagt, dass $\sim$ mindestens n verschiedene Äquivalenzklassen hat), dann erfüllt die Satzmenge

$$\Phi = \{\varphi\} \cup \{\varphi_n \ :\ n \in \mathbb{N}\}$$

die geforderte Bedingung.

(b) Argumentieren Sie (mit dem Kompaktheitssatz), dass es keine Satzmenge gibt, die besagt, dass $\sim$ endlich viele Äquivalenzklassen hat.

LÖSUNG:

Angenommen es gäbe eine solche Formelmenge Ψ. Ist Γ eine endliche Teilmenge von $\Phi \cup \Psi$, dann enthält Γ höchstens endlich viele Sätze der Form φ_n, und demzufolge gibt es ein maximales $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_n \in \Gamma$. Also ist jede Äquivalenzrelation mit n Klassen ein Modell für Γ. Nach dem Kompaktheitssatz wäre nun $\Phi \cup \Psi$ erfüllbar, was aber nicht sein kann, da ein Modell von $\Phi \cup \Psi$ höchstens endlich viele und gleichzeitig unendlich viele Äquivalenzklassen haben müsste.

(c) Schließen Sie aus (b), dass es keinen *einzelnen* Satz gibt, der besagt, dass $\sim$ unendlich viele Äquivalenzklassen hat.

LÖSUNG:

Gäbe es einen einzelnen Satz χ, dann würde der Satz $\varphi \wedge \neg\chi$ gerade besagen, dass $\sim$ endlich viele Klassen hat, eine solche Menge kann aber laut (b) nicht existieren. (Beachten Sie: Aus φ folgt, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, während aus $\neg\chi$ folgt, dass $\sim$ keine Äquivalenzrelation ist oder endlich viele Klassen hat.)

(P 2) Prädikatenlogische Resolution

Betrachten Sie die Signatur $S = \{c, f, P\}$, wobei P ein einstelliges Relationssymbol, c ein Konstantensymbol und f ein einstelliges Funktionssymbol ist.

(a) Zeigen Sie mittels GI-Resolution, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$(Pc \wedge \forall x (Px \rightarrow Pfx)) \rightarrow Pf^n c$$

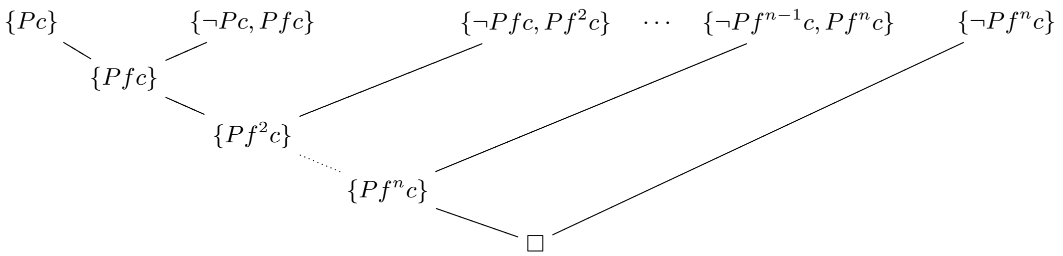
gilt. (Wie immer steht $f^n c$ für die n-malige Anwendung von f auf c; $f^0 c := c$)

Lösung:

Wir negieren die Aussage und erstellen eine SNF

$$\forall x(Pc \wedge (\neg Px \vee Pfx) \wedge \neg Pf^n c)$$

und erhalten die Klauseln $\{Pc\}$, $\{\neg Pf^i c, Pf^{i+1}c\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\{\neg Pf^n c\}$. Man kann nun mit n Resolutionsschritten die leere Klausel erzeugen.



(b) Zeigen Sie, dass die Aussage

$$(Pc \wedge \forall x(Px \to Pfx)) \to \forall x Px$$

nicht allgemeingültig ist, d. h. geben Sie ein Modell an, in dem die Aussage nicht gilt.

Lösung:

Mögliche Modelle, in dem die Aussage nicht gilt:

$$(\mathbb{N}, 1, n \mapsto n+1, \mathbb{N} \setminus \{0\})$$

$$(\{0,1\}, 1, (0 \mapsto 1, 1 \mapsto 1), \{1\})$$

Es gibt natürlich noch viele andere.

(Beachten Sie: Obige Aussage mit $c = 0$ und $f = n \mapsto n+1$ ist als „vollständige Induktion" bekannt. Die „vollständige Induktion" ist wahr, weil wir mit der Interpretation $c = 0$ und $f = n \mapsto n+1$ jedes Element der natürlichen Zahlen als Term der Form $(n \mapsto n+1)^n 0$ erhalten.)