



## Übung 8

### Formale Grundlagen der Informatik II

#### Aufgabe 1

Wir wollen die Unerfüllbarkeit der Menge folgender Formeln nachweisen:

$$\varphi_1 := \forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y \wedge Pz))$$

$$\varphi_2 := \exists x \forall y (y < x \rightarrow \neg Py)$$

$$\varphi_3 := \forall x \exists y (y < x)$$

- (a) Wandeln Sie die Formeln in Skolemnormalform um.

*Lösung.* Sei  $f$  ein zweistelliges Funktionssymbol,  $g$  ein einstelliges Funktionssymbol und  $c$  ein Konstantensymbol.

$$\forall x \forall y (x < y \rightarrow (x < fxy \wedge fxy < y \wedge Pfxy))$$

$$\forall y (y < c \rightarrow \neg Py)$$

$$\forall x (gx < x)$$

- (b) Übersetzen Sie das Ergebnis aus (a) in die Aussagenlogik und beweisen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, daß die Formelmengemenge  $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$  unerfüllbar ist.

*Hinweis.* Überlegen Sie sich zu erst intuitiv, warum die Formelmengemenge nicht erfüllbar sein kann.

*Lösung.* Für alle Terme  $s$  und  $t$  führen wir Aussagenvariablen  $p_{s<t}$  und  $p_{Pt}$  ein und erhalten die Formeln

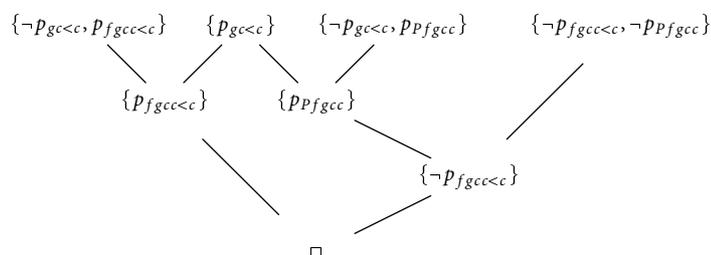
$$p_{s<t} \rightarrow (p_{s<fst} \wedge p_{fst<t} \wedge p_{Pfst}),$$

$$p_{t<c} \rightarrow \neg p_{Pt},$$

$$p_{gt<t}.$$

Es ergeben sich die Klauseln

$$\{\neg p_{s<t}, p_{s<fst}\}, \{\neg p_{s<t}, p_{fst<t}\}, \{\neg p_{s<t}, p_{Pfst}\}, \{\neg p_{t<c}, \neg p_{Pt}\}, \{p_{gt<t}\}.$$



## Aufgabe 2

Wir betrachten die Signatur  $S = \{f, 0\}$  mit einem einstelligem Funktionssymbol  $f$  und einer Konstanten  $0$ . Beginnend mit einem Element  $x$  einer  $S$ -Struktur betrachten wir die Folge  $x, f(x), f^2(x), \dots$  und untersuchen, wie lange es dauert bis der Wert  $0$  erreicht wird.

- (a) Geben Sie für jedes  $n > 0$  eine Formel  $\varphi_n(x)$  an, die sagt, daß in der Folge  $x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)$  der Wert  $0$  nicht vorkommt.

*Lösung.*  $\varphi_n(x) := \bigwedge_{i < n} \neg(f^i x = 0)$

- (b) Geben Sie eine Satzmenge  $\Phi$  an, welche besagt, daß es für jedes  $n > 0$  ein  $x$  gibt, so daß, wenn wir mit  $x$  beginnen, der Wert  $0$  frühestens nach  $n$  Schritten erreicht.

*Lösung.*  $\Phi := \{ \exists x \varphi_n(x) \mid n > 0 \}$ .

- (c) Beweisen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, daß es keine Satzmenge  $\Phi$  gibt, welche ausdrückt, daß für jedes  $x$  schließlich die  $0$  erreicht wird, d. h., daß es kein  $x$  gibt, so daß  $f^n(x) \neq 0$  für alle  $n$ .

*Lösung.* Angenommen es gäbe eine Satzmenge  $\Phi$  mit der gewünschten Eigenschaft. Sei  $c$  ein neues Konstantensymbol. Wir definieren

$$\Psi := \Phi \cup \{ \varphi_n(c) \mid n > 0 \}.$$

Diese Menge ist unerfüllbar, da es in jedem Modell  $(A, f, 0, c) \models \Psi$  eine Zahl  $n$  geben muß, so daß  $f^n(c) = 0$  ist. Dies widerspricht aber  $\varphi_{n+1}(c)$ .

Nach dem Kompaktheitssatz gibt es also eine endliche Teilmenge  $\Psi_0 \subseteq \Psi$ , welche unerfüllbar ist. Sei  $m$  eine Zahl, so daß

$$\Psi_0 \subseteq \Phi \cup \{ \varphi_n(c) \mid 0 < n < m \}.$$

Die Struktur  $(\mathbb{N}, f, 0, m)$  mit  $f(0) = 0$  und  $f(x) = x - 1$  für  $x > 0$  ist ein Modell von  $\Psi_0$ . Widerspruch.

(Die Collatz-Vermutung behauptet, daß die durch die Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit

$$f(n) := \begin{cases} (n-1)/2 & \text{für ungerade } n, \\ 3(n+1) & \text{für gerade } n, \end{cases}$$

erzeugte Folge für jede natürliche Zahl schließlich  $0$  ergibt. Bis jetzt konnte diese Vermutung weder bewiesen noch widerlegt werden.)