Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Achim Blumensath
Tobias Löw

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
Sommersemester 2006

Übung 8
Formale Grundlagen der Informatik II

Aufgabe 1

Wir wollen die Unerfüllbarkeit der Menge folgender Formeln nachweisen:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \forall y(x < y \to \exists z(x < z \wedge z < y \wedge Pz))\\
\varphi_2 &:= \exists x \forall y(y < x \to \neg Py)\\
\varphi_3 &:= \forall x \exists y(y < x)
\end{aligned}$$

(a) Wandeln Sie die Formeln in Skolemnormalform um.

Lösung. Sei f ein zweistelliges Funktionssymbol, g ein einstelliges Funktionssymbol und c ein Konstantensymbol.

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y(x < y \to (x < fxy \wedge fxy < y \wedge Pfxy))\\
&\forall y(y < c \to \neg Py)\\
&\forall x(gx < x)
\end{aligned}$$

(b) Übersetzen Sie das Ergebnis aus (a) in die Aussagenlogik und beweisen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, daß die Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ unerfüllbar ist.

Hinweis. Überlegen Sie sich zu erst intuitiv, warum die Formelmenge nicht erfüllbar sein kann.

Lösung. Für alle Terme s und t führen wir Aussagenvariablen $p_{s<t}$ und p_{Pt} ein und erhalten die Formeln

$$\begin{aligned}
&p_{s<t} \to (p_{s<fst} \wedge p_{fst<t} \wedge p_{Pfst})\,,\\
&p_{t<c} \to \neg p_{Pt}\,,\\
&p_{gt<t}\,.
\end{aligned}$$

Es ergeben sich die Klauseln

$$\{\neg p_{s<t}, p_{s<fst}\},\ \{\neg p_{s<t}, p_{fst<t}\},\ \{\neg p_{s<t}, p_{Pfst}\},\ \{\neg p_{t<c}, \neg p_{Pt}\},\ \{p_{gt<t}\}\,.$$

$$\begin{tikzcd}
\{\neg p_{gc<c}, p_{fgcc<c}\} \arrow[dr, dash] & & \{p_{gc<c}\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \{\neg p_{gc<c}, p_{Pfgcc}\} \arrow[dl, dash] & & \{\neg p_{fgcc<c}, \neg p_{Pfgcc}\} \arrow[ddl, dash] \\
& \{p_{fgcc<c}\} \arrow[ddrr, dash] & & \{p_{Pfgcc}\} \arrow[drr, dash] & & & \\
& & & & & \{\neg p_{fgcc<c}\} \arrow[dll, dash] & \\
& & & \square & & &
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 2

Wir betrachten die Signatur $S = \{f, 0\}$ mit einem einstelligen Funktionssymbol f und einer Konstanten 0. Beginnend mit einem Element x einer S-Struktur betrachten wir die Folge $x, f(x), f^2(x), \dots$ und untersuchen, wie lange es dauert bis der Wert 0 erreicht wird.

(a) Geben Sie für jedes $n > 0$ eine Formel $\varphi_n(x)$ an, die sagt, daß in der Folge $x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)$ der Wert 0 nicht vorkommt.

Lösung. $\varphi_n(x) := \bigwedge_{i<n} \neg(f^i x = 0)$

(b) Geben Sie eine Satzmenge Φ an, welche besagt, daß es für jedes $n > 0$ ein x gibt, so daß, wenn wir mit x beginnen, der Wert 0 frühestens nach n Schritten erreicht.

Lösung. $\Phi := \{ \exists x \varphi_n(x) \mid n > 0 \}$.

(c) Beweisen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, daß es keine Satzmenge Φ gibt, welche ausdrückt, daß für jedes x schließlich die 0 erreicht wird, d. h., daß es kein x gibt, so daß $f^n(x) \neq 0$ für alle n.

Lösung. Angenommen es gäbe eine Satzmenge Φ mit der gewünschten Eigenschaft. Sei c ein neues Konstantensymbol. Wir definieren

$$\Psi := \Phi \cup \{ \varphi_n(c) \mid n > 0 \} .$$

Diese Menge ist unerfüllbar, da es in jedem Model $(A, f, 0, c) \vDash \Psi$ eine Zahl n geben muß, so daß $f^n(c) = 0$ ist. Dies widerspricht aber $\varphi_{n+1}(c)$.

Nach dem Kompaktheitssatz gibt es also eine endliche Teilmenge $\Psi_0 \subseteq \Psi$, welche unerfüllbar ist. Sei m eine Zahl, so daß

$$\Psi_0 \subseteq \Phi \cup \{ \varphi_n(c) \mid 0 < n < m \} .$$

Die Struktur $(\mathbb{N}, f, 0, m)$ mit $f(0) = 0$ und $f(x) = x - 1$ für $x > 0$ ist ein Modell von Ψ_0. Widerspruch.

(Die Collatz-Vermutung behauptet, daß die durch die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(n) := \begin{cases} (n-1)/2 & \text{für ungerade } n\,, \\ 3(n+1) & \text{für gerade } n\,, \end{cases}$$

erzeugte Folge für jede natürliche Zahl schließlich 0 ergibt. Bis jetzt konnte diese Vermutung weder bewiesen noch widerlegt werden.)