**Fachbereich Mathematik**
Martin Otto
Achim Blumensath
Tobias Löw

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2006
17. Mai 2005

# Formale Grundlagen der Informatik II

Lösungshinweise zum fünften Übungsblatt

## Präsenzübungen

### (P 1)

Finden Sie mittels Beweissuche im Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$ für folgende Formeln bzw. Sequenzen entweder eine Herleitung oder eine nicht-erfüllende Belegung.

(a) $(p \wedge q) \vee \neg(q \vee r) \vee r \vee \neg p$

LÖSUNG:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q,p \vdash p,r}\,(\mathrm{Ax}) \quad \dfrac{}{q,p \vdash q,r}\,(\mathrm{Ax})}{q,p \vdash p \wedge q, r}\,(\wedge\mathrm{R}) \quad \dfrac{}{r,p \vdash p \wedge q, r}\,(\mathrm{Ax})}{q \vee r, p \vdash p \wedge q, r}\,(\vee\mathrm{L})}{q \vee r \vdash p \wedge q, r, \neg p}\,(\neg\mathrm{R})}{\vdash p \wedge q, \neg(q \vee r), r, \neg p}\,(\neg\mathrm{R})}{\vdash p \wedge q, \neg(q \vee r), r \vee \neg p}\,(\vee\mathrm{R})}{\vdash p \wedge q, \neg(q \vee r) \vee r \vee \neg p}\,(\vee\mathrm{R})}{\vdash (p \wedge q) \vee \neg(q \vee r) \vee r \vee \neg p}\,(\vee\mathrm{R})$$

(b) $p, q \vee r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

LÖSUNG:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p,q \vdash p, p \wedge r}\,(\mathrm{Ax}) \quad \dfrac{}{p,q \vdash q, p \wedge r}\,(\mathrm{Ax})}{p,q \vdash p \wedge q, p \wedge r}\,(\wedge\mathrm{R}) \quad \dfrac{\dfrac{}{p,r \vdash p \wedge q, p}\,(\mathrm{Ax}) \quad \dfrac{}{p,r \vdash p \wedge q, r}\,(\mathrm{Ax})}{p,r \vdash p \wedge q, p \wedge r}\,(\wedge\mathrm{R})}{p, q \vee r \vdash p \wedge q, p \wedge r}\,(\vee\mathrm{L})}{p, q \vee r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)}\,(\vee\mathrm{R})$$

(c) $\neg(\neg(p \wedge q) \wedge r) \vee (q \wedge r)$

LÖSUNG:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{r \vdash q,q \qquad r \vdash q,p}{r \vdash q, p \wedge q}\,(\wedge\mathrm{R}) \quad \dfrac{}{r \vdash r, p \wedge q}\,(\mathrm{Ax})}{r \vdash q \wedge r, p \wedge q}\,(\wedge\mathrm{R})}{\neg(p \wedge q), r \vdash q \wedge r}\,(\neg\mathrm{L})}{\neg(p \wedge q) \wedge r \vdash q \wedge r}\,(\wedge\mathrm{L})}{\vdash \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r), q \wedge r}\,(\neg\mathrm{R})}{\vdash \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r) \vee (q \wedge r)}\,(\vee\mathrm{R})$$

Eine nicht erfüllende Belegung ist z. B. $r \mapsto 1$ und $q, p \mapsto 0$.

Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit der Formel in (a) auch mittels Resolution.

LÖSUNG:

Für die negierte Formel aus (a) er halten wir die Klauselmenge $\{\{p, q\}, \{\neg q, \neg r\}, \{r\}, \{\neg p\}\}$. Daraus leiten wir sofort die Klauseln $\{\neg q\}$, $\{p\}$ und schließlich $\Box$ ab.

**(P 2)**

Eine endliche Formelmenge $\Gamma$ heißt *konsistent* falls $\Gamma \vdash \emptyset$ *nicht* ableitbar ist.

(a) Zeigen Sie in $\mathcal{SK}^+$, dass für alle $\Gamma$ und $\varphi$ stets gilt:

$$\Gamma \text{ konsistent} \quad \Rightarrow \quad \Gamma, \varphi \text{ konsistent oder } \Gamma, \neg\varphi \text{ konsistent}$$

LÖSUNG:

Beweis durch Widerspruch: Angenommen $\Gamma, \varphi$ und $\Gamma, \neg\varphi$ sind inkonsistent (d. h. nicht konsistent), dann existieren Ableitungen für $\Gamma, \varphi \vdash \emptyset$ und $\Gamma, \neg\varphi \vdash \emptyset$. Mit der Regel (Kontr) erhalten wir ein Ableitung für $\Gamma \vdash \emptyset$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \emptyset}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\,(\neg\text{R}) \qquad \dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \emptyset}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}\,(\neg\text{R})}{\Gamma \vdash \emptyset}\,(\text{Kontr})$$

Also ist $\Gamma$ inkonsistent.

(b) Warum arbeitet man bei (a) lieber in $\mathcal{SK}^+$ als in $\mathcal{SK}$?

LÖSUNG:

Man arbeitet lieber in $\mathcal{SK}^+$ weil man die Regel (Kontr) benutzen möchte. Die Aussage gilt natürlich auch in $\mathcal{SK}$, hier ist der Beweis aber ungleich schwerer, da man Induktion über den Aufbau der Herleitungen von $\Gamma, \varphi \vdash \emptyset$ und $\Gamma, \neg\varphi \vdash \emptyset$ betreiben muss.

**(P 3)**

Sei $S$ eine endliche Menge von Signalen (von Prozessen in einem Netzwerk). Darunter sind autonome Taktgeber, die in jedem Schritt ein Signal senden. Andere senden genau dann wenn sie im vorangehenden Schritt von bestimmten Prozessen ein Signal empfangen haben.

Zu jedem $s \in S$ sei diese Abhängigkeit beschrieben durch die Menge $I(s) \subseteq S$: $s$ sendet im nächsten Schritt falls alle Signale in $I(s)$ im aktuelle Schritt senden.

(a) Beschreiben Sie obiges Problem mittels Hornklauseln über den Variablen $p_{s,t}$ mit $s \in S$ und $t \in \mathbb{N}$. ($s$ sendet in Schritt $t$ gdw. $p_{s,t}$ wahr in der minimalen Interpretation)

LÖSUNG:

Für alle $s \in S$ und $t \in \mathbb{N}$ bilden wir die Hornformel

$$\Big(\bigwedge_{s' \in I(s)} p_{s',t}\Big) \rightarrow p_{s,t+1}$$

Insbesondere gilt für einen autonomen Taktgeber $s$, dass $p_{s,t}$ für alle $t \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass für die minimale Belegung der Hornklauseln in (a) gilt

$$p_{s,t} \mapsto 1 \quad \text{impliziert} \quad p_{s,t+1} \mapsto 1\,.$$

LÖSUNG:

Beweis durch Induktion: Angenommen $p_{s,t} \mapsto 1$. Falls $t = 0$, dann ist $s$ ein autonomer Taktgeber und die Aussage gilt. Falls $t = t' + 1$, dann gilt $p_{s',t'}$ für alle $s' \in I(s)$. Mit der I.V. folgt $p_{s',t'+1}$ für alle $s' \in I(s)$, also $p_{s,t+1}$ (weil $t + 1 = t' + 2$).

(c) Charakterisieren Sie, welche Signale nie senden.

LÖSUNG:

Man kann das Problem als gerichteten Graphen veranschaulichen: die Knotenmenge ist $S$ und wir haben eine (gerichtete) Kante von $s'$ nach $s$ gdw. $s' \in I(s)$. (Man denke es als „die Signale laufen in Richtung der Kanten".) Die Signale, die nie Senden, sind genau diejenigen $s \in S$, für die mindestens ein Signal $s' \in I(s)$ existiert, welches nie sendet. Wir

nennen die Menge der Signale, die nie senden, $N$. Die Menge $N$ kann nun in zwei Teile zerlegt werden: $R \subseteq S$, wobei $s \in R$ falls es $s_1, \ldots, s_n \in S$ gibt, sodass $s = s_n = s_1$ und $s_n \in I(s_{n-1})$, $s_{n-1} \in I(s_{n-2})$, ..., $s_2 \in I(s_1)$ gilt. D. h. die Elemente in $R$ liegen auf (gerichteten) Kreisen. Andererseits kann ein Signal, dass auf einem (gerichteten) Kreis liegt, nie senden, da es (indirekt) auf ein Signal von sich selbst wartet.
Die Signale in $Q := S \setminus R$ sind gerade diejenigen Elemente, die nicht auf einem Kreis liegen, aber (indirekt) auf ein Signal von mindestens einem Element auf einem Kreis warten. (Hat ein Signal $s$ keinen (indirekten) Vorgänger auf einem Kreis, dann ist die Abwicklung aller Pfade nach $s$ endlich, d. h. nach endlich vielen Zeitschritten sendet $s$.)