Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Achim Blumensath
Tobias Löw

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006
3. Mai 2005

Formale Grundlagen der Informatik II

Lösungshinweise zum dritten Übungsblatt

Präsenzübungen

(P 1) 3-Färbbarkeit

Wir betrachten einen Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge V und Kantenrelation $E \subseteq V \times V$. Eine 3-Färbung von V ist eine Abbildung $F : V \to \{1, 2, 3\}$ derart, dass für alle $(u, v) \in E$ gilt: $F(u) \neq F(v)$ (benachbarte Knoten haben verschiedene Farben). Eine 3-Färbung einer Teilmenge $V_0 \subseteq V$ der Knotenmenge ist genauso definiert.

Zeigen Sie: Ein Graph mit abzählbar unendlicher Knotenmenge V hat genau dann eine 3-Färbung, wenn es auf jeder endlichen Teilmenge $V_0 \subseteq V$ eine 3-Färbung gibt.

Hinweis: Um AL-Kompaktheit anzuwenden, kodiert man Knotenfarben durch Aussagenvariablen (für alle $v \in V$ und $f \in \{1, 2, 3\}$ ist $p_{v,f}$ wahr, falls der Knoten v mit der Farbe f gefärbt ist) und beschreibt die Bedingungen an eine 3-Färbung durch AL-Formeln.

Bestimmen Sie dafür die Formelmengen zu folgenden Aussagen:

- jeder Knoten hat mindestens eine Farbe
- jeder Knoten hat höchstens eine Farbe
- benachbarte Knoten haben verschiedene Farben

LÖSUNG:

Eine 3-Färbung muss folgende Eigenschaften haben:

- jeder Knoten hat mindestens eine Farbe: für jedes $v \in V$ gilt

$$p_{v,1} \vee p_{v,2} \vee p_{v,3}$$

- jeder Knoten hat höchstens eine Farbe: für jedes $v \in V$ gilt

$$(p_{v,1} \to \neg(p_{v,2} \vee p_{v,3})) \wedge (p_{v,2} \to \neg(p_{v,1} \vee p_{v,3})) \wedge (p_{v,3} \to \neg(p_{v,1} \vee p_{v,2}))$$

  Eine andere mögliche Lösung ist: für jedes $v \in V$ gilt

$$\bigwedge\{\neg(p_{v,i} \wedge p_{v,j}) \ : \ \text{für alle } i, j \in \{1, 2, 3\} \text{ mit } i \neq j\}$$

- benachbarte Knoten haben verschiedene Farben: für jedes $(v, u) \in E$ gilt

$$(p_{v,1} \to \neg p_{u,1}) \wedge (p_{v,2} \to \neg p_{u,2}) \wedge (p_{v,3} \to \neg p_{u,3})$$

  Eine andere mögliche Lösung ist: für jedes $(v, u) \in E$ gilt

$$\bigwedge\{\neg(p_{v,i} \wedge p_{u,i}) \ : \ \text{für alle } i \in \{1, 2, 3\}\}$$

Fasst man alles zusammen, dann erhält man die Formelmenge

$$\begin{aligned}\Phi_G := & \bigcup_{v \in V} \{p_{v,1} \vee p_{v,2} \vee p_{v,3}\} \\ & \cup \bigcup_{v \in V} \{(p_{v,1} \to \neg(p_{v,2} \vee p_{v,3})) \wedge (p_{v,2} \to \neg(p_{v,1} \vee p_{v,3})) \wedge (p_{v,3} \to \neg(p_{v,1} \vee p_{v,2}))\} \\ & \cup \bigcup_{(v,u) \in E} \{(p_{v,1} \to \neg p_{u,1}) \wedge (p_{v,2} \to \neg p_{u,2}) \wedge (p_{v,3} \to \neg p_{u,3})\}\end{aligned}$$

Dass der Graph 3-färbbar ist, bedeutet genau, dass Φ erfüllbar ist.

Es ist klar, dass alle Teilgraphen eines 3-färbbaren Graphen 3-färbbar sind.
Angenommen, jeder endliche Teilgraph von G ist 3-färbbar. Um zu zeigen, dass G 3-färbbar ist genügt es nach dem Kompaktheitssatz zu zeigen, dass jede endliche Teilmenge von Φ_G erfüllbar ist. Sei T eine endliche Teilmenge von Φ_G, und G_T der Teilgraph von G, der genau aus den Knoten v besteht, für die es eine Variable $p_{v,i}$ (i beliebig) in T gibt. Dann ist G_T endlich und Φ_{G_T} umfasst T. Da G_T 3-färbbar ist, folgt, dass Φ_{G_T} erfüllbar ist.

(P 2) Klauselmengen

Formen Sie folgende AL-Formeln in äquivalente KNF und Klauselmengen um.

(a) $((p \wedge \neg q) \vee s) \rightarrow ((\neg r \wedge q) \vee \neg s)$

Lösung:

Durch Äquivalenzumformungen erhalten wir

$$\begin{aligned}((p \wedge \neg q) \vee s) \rightarrow ((\neg r \wedge q) \vee \neg s) &\equiv \neg((p \wedge \neg q) \vee s) \vee ((\neg r \wedge q) \vee \neg s)\\ &\equiv ((\neg p \vee q) \wedge \neg s) \vee ((\neg r \vee \neg s) \wedge (q \vee \neg s))\\ &\equiv (\neg p \vee q \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee q \vee q \vee \neg s) \wedge (\neg s \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (\neg s \vee q \vee \neg s)\end{aligned}$$

und die Klauselmenge $\big\{\{\neg p, q, \neg r, \neg s\}, \{\neg p, q, \neg s\}, \{\neg s, \neg r\}, \{\neg s, q\}\big\}$.

(b) $(\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

Lösung:

Durch Äquivalenzumformungen erhalten wir

$$\begin{aligned}&(\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))\\ &\equiv ((\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \wedge ((p \vee q) \wedge (p \vee r))) \vee (\neg(\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \wedge \neg((p \vee q) \wedge (p \vee r)))\\ &\equiv ((\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \wedge ((p \vee q) \wedge (p \vee r))) \vee ((p \vee (q \wedge r)) \wedge ((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r)))\\ &\equiv ((\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \wedge ((p \vee q) \wedge (p \vee r))) \vee (((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \wedge (\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)))\\ &\equiv (\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \wedge ((p \vee q) \wedge (p \vee r))\\ &\equiv \neg p \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee r)\end{aligned}$$

und die Klauselmenge $\big\{\{\neg p\}, \{\neg q, \neg r\}, \{p, q\}, \{p, r\}\big\}$.

(P 3) Klauselmengen

Bestimmen Sie die Anzahl aller möglichen Klauselmengen in n Variablen, wobei

(a) alles erlaubt ist. (Wie z. B. $\big\{\{p, \neg p\}, \dots\big\}$.)

Lösung:

Es gibt 4^n verschiedene Klauseln (da für jede Variable p entweder $\emptyset$, $\{p\}$, $\{\neg p\}$ oder $\{p, \neg p\}$ in der Klauseln enthalten ist), also $2^{4^n} = 2^{2^{2n}}$ verschiedene Klauselmengen.

(b) in jeder Klausel jede Variable höchstens einmal vorkommt. (D. h. die Klausel $\{p, \neg p\}$ ist *nicht* erlaubt.)

Lösung:

Es gibt 3^n verschiedene Klauseln (da für jede Variable p entweder $\emptyset$, $\{p\}$ oder $\{\neg p\}$ in der Klauseln enthalten ist), also 2^{3^n} verschiedene Klauselmengen.

(c) in jeder Klausel jede Variable genau einmal vorkommt.

Lösung:

Es gibt 2^n verschiedene Klauseln (da für jede Variable p entweder $\{p\}$ oder $\{\neg p\}$ in der Klauseln enthalten ist), also 2^{2^n} verschiedene Klauselmengen.

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der Anzahl verschiedener n-stelliger boolescher Funktionen.

Lösung:

Es gibt 2^{2^n} verschiedene n-stellige boolesche Funktionen. Das entspricht genau der Anzahl aus Aufgabenteil (c).