Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Achim Blumensath
Tobias Löw

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006

Übung 2
Formale Grundlagen der Informatik II

Aufgabe 1

Wir versuchen, ein verteiltes System in der Aussagenlogik zu modellieren. Angenommen wir wollen n Prozesse für s Zeiteinheiten beobachten. Jeder Prozeß kann sich an jedem Zeitpunkt im Zustand p, q oder r befinden. Wir führen Aussagenvariablen p^i_t, q^i_t und r^i_t ein, die auf wahr gesetzt werden, wenn Prozeß i zur Zeit t im entsprechenden Zustand ist. Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in AL:

(a) Zu jedem Zeitpunkt ist höchstens ein Prozeß in Zustand q.

Lösung. $\bigwedge_{t\leq s} \bigwedge_{i\neq k} \neg(q^i_t \wedge q^k_t)$

(b) Es sind immer mindestens zwei Prozesse in Zustand p.

Lösung. $\bigwedge_{t\leq s} \bigvee_{i\neq k} (p^i_t \wedge p^k_t)$

(c) Wenn sich ein Prozeß in Zustand q befindet, dann wechselt er nach spätestens 3 Zeiteinheiten in den Zustand r.

Lösung. $\bigwedge_{t\leq s} \bigwedge_{i\leq n} [q^i_t \rightarrow (r^i_{t+1} \vee r^i_{t+2} \vee r^i_{t+3})]$

Aufgabe 2

Geben Sie zu der folgenden Formel äquivalente Formeln in KNF und DNF an:

$$\varphi = [p \rightarrow \neg(q \vee r)] \rightarrow [\neg(q \leftrightarrow (r \rightarrow p)) \wedge (\neg p \vee q)]$$

Lösung. Aus der Wahrheitstabelle

p	q	r	$p \rightarrow \neg(q \vee r)$	$q \leftrightarrow (r \rightarrow p)$	$\neg p \vee q$	φ
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1

liest man ab:

$$\begin{aligned}\varphi &\equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q) \\ &\equiv (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a) Ist die Formel $\varphi = \neg[(\neg q \rightarrow p) \vee (q \wedge (\neg r \vee \neg p))]$ erfüllbar?

Lösung. Ja, für $\mathfrak{J}(p) = \mathfrak{J}(q) = \mathfrak{J}(r) = 0$ ist $\varphi^{\mathfrak{J}} = 1$.

(b) Beweisen Sie, daß $\varphi \not\models \psi$ genau dann gilt, wenn $\varphi \wedge \neg\psi$ erfüllbar ist.

Lösung. ($\Rightarrow$) Gilt $\varphi \not\models \psi$, so gibt es eine Interpretation $\mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{J} \models \varphi$ und $\mathfrak{J} \not\models \psi$. Also $\mathfrak{J} \models \varphi \wedge \neg\psi$, und diese Formel ist erfüllbar.

($\Leftarrow$) Ist $\varphi \wedge \neg\psi$ erfüllbar, dann gibt es eine Interpretation $\mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{J} \models \varphi \wedge \neg\psi$. Insbesondere gilt $\mathfrak{J} \models \varphi$ und $\mathfrak{J} \not\models \psi$. Also haben wir ein Gegenbeispiel für die Behauptung $\varphi \models \psi$ gefunden.