Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Achim Blumensath
Tobias Löw

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006
19. April 2006

Formale Grundlagen der Informatik II

Lösungshinweise zum ersten Übungsblatt

Präsenzübungen

(P 1)

Gegeben sei die Interpretation $\mathfrak{I}$ mit

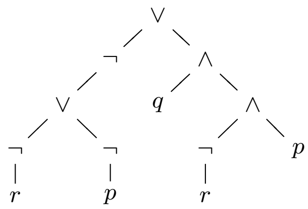
$$\mathfrak{I}(p) = 0, \quad \mathfrak{I}(q) = 1, \quad \mathfrak{I}(r) = 1\,.$$

Geben Sie für jede der folgenden Formeln an, ob sie durch $\mathfrak{I}$ erfüllt werden.

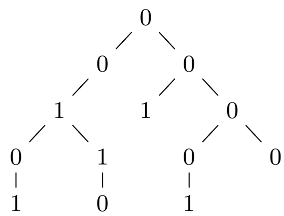
$\varphi_1 := ((\neg r \vee \neg p) \rightarrow (q \wedge (\neg r \wedge p)))$

LÖSUNG:

Elimination des Junktors $\rightarrow$ liefert die Formel $\varphi_1 = (\neg(\neg r \vee \neg p) \vee (q \wedge (\neg r \wedge p)))$ mit dem Parsebaum



Wir berechnen nun die Interpretation induktiv



und erhalten $\varphi_1^{\mathfrak{I}} = 0$.

$\varphi_2 := \neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg r \vee (\neg q \wedge \neg p)))$

LÖSUNG:

Elimination des Junktors $\rightarrow$ liefert die Formel $\varphi_2 = \neg\neg(p \wedge q) \vee (\neg r \vee (\neg q \wedge \neg p)))$ und wir erhalten $\varphi_2^{\mathfrak{I}} = 0$.

$\varphi_3 := \neg(((q \wedge \neg p) \leftrightarrow \neg r) \vee (\neg r \vee p))$

LÖSUNG:

Elimination des Junktors $\leftrightarrow$ liefert die Formel $\varphi_2 = \neg(((\neg(q \wedge \neg p) \wedge \neg\neg r) \vee ((q \wedge \neg p) \wedge \neg r)) \vee (\neg r \vee p))$ und wir erhalten $\varphi_3^{\mathfrak{I}} = 1$.

(P 2)

Weisen Sie die folgenden Äquivalenzen und Folgerungsbeziehungen nach:

(a) $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$

LÖSUNG:

Angenommen $\mathfrak{I}$ ist ein Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \neg(\varphi \vee \psi)$, also $\neg(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} = 1$. Es folgt

$$\begin{aligned} \neg(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} = 1 &\Leftrightarrow \varphi \vee \psi^{\mathfrak{I}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \varphi^{\mathfrak{I}} = 0 \quad \text{und} \quad \psi^{\mathfrak{I}} = 0 \\ &\Leftrightarrow (\neg\varphi)^{\mathfrak{I}} = 1 \quad \text{und} \quad (\neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1 \\ &\Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1 \end{aligned}$$

Also, $\mathfrak{I} \models \neg(\varphi \vee \psi)$ gdw. $\mathfrak{I} \models \neg\varphi \wedge \neg\psi$.

(b) $\{\neg\varphi, \psi \to \varphi\} \models \neg\psi$

LÖSUNG:

Angenommen $\mathfrak{I}$ ist ein Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \{\neg\varphi, \psi \to \varphi\}$, also $(\neg\varphi)^{\mathfrak{I}} = 1$ und $(\psi \to \varphi)^{\mathfrak{I}} = 1$. Es folgt $\varphi^{\mathfrak{I}} = 0$. Da $(\neg\psi \vee \varphi)^{\mathfrak{I}} = 1$ gdw. $(\neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1$ oder $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$, folgt $(\neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1$ wie gewünscht.

(c) $(\varphi \wedge \psi) \vee \chi \equiv (\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)$

LÖSUNG:

Angenommen $\mathfrak{I}$ ist ein Interpretation mit $\mathfrak{I} \models (\varphi \wedge \psi) \vee \chi$, also $((\varphi \wedge \psi) \vee \chi)^{\mathfrak{I}} = 1$, was äquivalent zu $(\varphi \wedge \psi)^{\mathfrak{I}} = 1$ oder $\chi^{\mathfrak{I}} = 1$ ist. Wie fahren mit einer Fallunterscheidung fort: Angenommen $(\varphi \wedge \psi)^{\mathfrak{I}} = 1$. Dann folgt $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$ und $\psi^{\mathfrak{I}} = 1$, also,$(\varphi \vee \chi)^{\mathfrak{I}} = 1$ und $(\psi \vee \chi)^{\mathfrak{I}} = 1$, und schließlich $((\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi))^{\mathfrak{I}} = 1$. Falls $\chi^{\mathfrak{I}} = 1$, dann folgt $(\varphi \vee \chi)^{\mathfrak{I}} = 1$ und $(\psi \vee \chi)^{\mathfrak{I}} = 1$, und wie oben $((\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi))^{\mathfrak{I}} = 1$.

Gilt andererseits $\mathfrak{I} \models (\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)$, also $((\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi))^{\mathfrak{I}} = 1$, dann folgt $(\varphi \vee \chi)^{\mathfrak{I}} = 1$ und $(\psi \vee \chi)^{\mathfrak{I}} = 1$ (†). Angenommen $\chi^{\mathfrak{I}} = 1$, dann folgt sofort $((\varphi \wedge \psi) \vee \chi)^{\mathfrak{I}} = 1$. Falls $\chi^{\mathfrak{I}} = 0$, dann folgt wegen (†), dass $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$ und $\psi^{\mathfrak{I}} = 1$, also $(\varphi \wedge \chi)^{\mathfrak{I}} = 1$ und schließlich $((\varphi \wedge \psi) \vee \chi)^{\mathfrak{I}} = 1$.

Also, haben wir $(\varphi \wedge \psi) \vee \chi \equiv (\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)$ gezeigt.

(P 3)

Beweisen Sie per Induktion über den Formelaufbau, dass es zu jeder aussagenlogischen Formel φ jeweils eine äquivalente Formel φ' gibt, sodass

(a) φ' nur die Junktoren $\neg$ und $\wedge$ und keine Konstanten enthält. (Welche Eigenschaft muss hierfür die Variablenmenge haben?)

LÖSUNG:

Aus (P 2)(a) wissen wir, dass $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$ und demzufolge auch $\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ gilt. Weiterhin gilt $p_1 \wedge \neg p_1 \equiv 0$ und $\neg(p_1 \wedge \neg p_1) \equiv 1$. (Dafür brauchen wir aber mindestens eine Variable, also $\mathcal{V} \neq \emptyset$.) Wir definieren nun induktiv eine Abbildung $J : \mathrm{AL}(\mathcal{V}) \to \mathrm{AL}(\mathcal{V})$ durch:

$$\begin{aligned} J(0) &:= p_1 \wedge \neg p_1 \\ J(1) &:= \neg(p_1 \wedge \neg p_1) \\ J(\varphi \wedge \psi) &:= \varphi \wedge \psi \\ J(\varphi \vee \psi) &:= \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \\ J(\neg\varphi) &:= \neg\varphi \end{aligned}$$

Offensichtlich enthält $J(\varphi)$ nur die Junktoren $\neg$ und $\wedge$ und keine Konstanten. Dass $J(\varphi) \equiv \varphi$ kann leicht aus obigen Bemerkungen mittels Induktion gezeigt werden.

(b) φ' nur den Junktor $\to$ und die Konstante 0 enthält. (Wir fassen hier den Junktor $\to$ nicht als Abkürzung auf.)

LÖSUNG:

Wir gehen analog zu Teil (a) vor:

$$\begin{aligned} J(0) &:= 0 \\ J(1) &:= 0 \to 0 \\ J(\varphi \wedge \psi) &:= (\varphi \to (\psi \to 0)) \to 0 \\ J(\varphi \vee \psi) &:= (\varphi \to 0) \to \psi \\ J(\neg\varphi) &:= \varphi \to 0 \end{aligned}$$

Aus der Wertetabelle für $\to$ liest man leicht ab, dass $0 \to 0 \equiv 1$, $(\varphi \to (\psi \to 0)) \to 0 \equiv \neg(\varphi \to \neg\psi) \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \equiv \varphi \wedge \psi$ und $(\varphi \to 0) \to \psi \equiv \neg\varphi \to \psi \equiv \varphi \vee \psi$. Daraus kann man mit Induktion zeigen, dass $J(\varphi) \equiv \varphi$ gilt.