Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Achim Blumensath
Tobias Löw

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006
12. Juli 2006

Formale Grundlagen der Informatik II

Elftes Übungsblatt

Präsenzübungen

2 Wochen / thematisch übergreifendes Übungsmaterial

(P 1) Entscheidbarkeit / rek. Aufzählbarkeit

Welche der folgenden Formelmengen sind entscheidbar bzw. rekursiv aufzählbar?

(a) $\mathrm{SAT(AL)} := \{\varphi \in \mathrm{AL} \;:\; \varphi \text{ erfüllbar}\}$

(b) zu geg. $\psi \in \mathrm{AL}: \quad \psi^{\models} := \{\varphi \in \mathrm{AL} \;:\; \psi \models \varphi\}$

(c) $\mathrm{SAT(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} \;:\; \varphi \text{ erfüllbar}\}$

(d) $\mathrm{VAL(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} \;:\; \varphi \text{ allgemeingültig}\}$

(e) $\mathrm{UNSAT(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} \;:\; \varphi \text{ unerfüllbar}\}$

(f) zu geg. $\psi \in \mathrm{FO}: \quad \psi^{\models} := \{\varphi \in \mathrm{FO} \;:\; \psi \models \varphi\}$

(P 2)

Im folgenden sei φ eine beliebige Formel in AL bzw. in FO. Finden Sie alle Äquivalenzen unter den folgenden Bedingungen und Beispiele, die Nicht-Äquivalenzen belegen. Geben Sie jeweils kurze Begründungen.

(a) φ allgemeingültig

(b) $\neg\varphi$ allgemeingültig

(c) $\neg\varphi$ erfüllbar

(d) φ unerfüllbar

(e) $\varphi \models \neg\varphi$

(f) $\neg\varphi \models \varphi$

(g) die Sequenz $\emptyset \vdash \varphi$ ist ableitbar

(h) die Sequenz $\varphi \vdash \emptyset$ ist ableitbar

(P 3) Resolution

Zeigen Sie mittels Resolution, dass folgende Formelmengen jeweils unerfüllbar sind.

(a) Die AL Formelmenge

$$\begin{array}{ll} (1) & (p \vee q \vee r) \wedge (p \to s) \wedge (q \to s) \\ (2) & \neg((r \vee s) \wedge \neg t) \\ (3) & (t \to \neg t) \end{array}$$

(b) Die FO Formelmenge

$$\begin{array}{ll} (1) & \forall x \forall y \forall z (Rxy \vee Rxz \vee Ryz) \\ (2) & \forall x \forall y (Rfxfy \rightarrow Rxy) \\ (3) & \exists x \forall y \neg Rxfy \end{array}$$

(c) Und was ist hiermit?

$$\begin{array}{ll} (1) & \forall x \forall y \forall z (x{=}y \vee x{=}z \vee y{=}z) \\ (2) & \forall x \forall y (fx{=}fy \rightarrow x{=}y) \\ (3) & \exists x \forall y \neg\, x{=}fy \end{array}$$

(P 4) Sequenzen

Leiten Sie die folgenden Sequenzen in $\mathcal{SK}$ (oder $\mathcal{SK}^+$) ab, oder zeigen Sie, dass sie nicht ableitbar sein können:

(a) $\exists x\, \varphi \vdash \varphi(c/x)$

(b) $\forall x\, \varphi \vdash \exists x\, \varphi$

(c) $\forall x\, \varphi \vdash \varphi(c/x)$

(d) $\forall x\, (\varphi \vee \psi) \vdash \forall x\, \varphi \vee \forall x\, \psi$

(e) $\forall x\, \varphi \vee \forall x\, \psi \vdash \forall x\, (\varphi \vee \psi)$

(P 5)

Zur Signatur $S = \{<, P, Q\}$ betrachten Sie S-Strukturen $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, <, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}})$, wo $<$ die natürliche lineare Ordnung der natürlichen Zahlen ist, und $P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N}$ das Zutreffen von Zustands-Eigenschaften p, q in Abhängigkeit von dem Zeitparameter $t \in \mathbb{N}$ kodieren. (z. B. : $1 \in P^{\mathcal{A}}$ bedeutet, dass das System zum Zeitpunkt $t = 1$ Eigenschaft p erfüllt)

Geben Sie FO(S)-Formeln an, die die folgenden Eigenschaften (in Strukturen $\mathcal{A}$ wie oben) ausdrücken:

(a) bis auf endlich viele Ausnahmen ist p erfüllt („fast immer p“).

(b) immer wenn p erfüllt ist, so wird zu einem späteren Zeitpunkt q erfüllt.

(c) p wird immer wieder erfüllt und schließlich (ab einem geeigneten Zeitpunkt) gilt stets q bis zum nächsten p.

(P 6)

Welche der folgenden Eigenschaften von Graphen oder Elementen in Graphen sind durch FO-Formeln oder Formelmengen ausdrückbar? Geben Sie Formalisierungen an bzw. beweisen Sie, dass die betreffende Eigenschaft nicht in FO ausdrückbar ist. Beachten Sie, dass wir *in dieser Aufgabe* Graphen als gerichtete Graphen mit Kantenrelation E verstehen.

(a) die (gerichtete) Distanz von x nach y ist genau 3.

(b) x hat unendlich viele Nachfolger (ausgehende Kanten).

(c) x hat endlich viele Nachfolger.

(d) E ist transitiv und es gibt keine Kreise.

(e) E ist transitiv und jeder Knoten ist von x aus auf einem Pfad erreichbar.