Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Achim Blumensath
Tobias Löw

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006

Übung 8
Formale Grundlagen der Informatik II

Aufgabe 1

Wir wollen die Unerfüllbarkeit der Menge folgender Formeln nachweisen:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \forall y(x < y \rightarrow \exists z(x < z \land z < y \land Pz)) \\
\varphi_2 &:= \exists x \forall y(y < x \rightarrow \neg Py) \\
\varphi_3 &:= \forall x \exists y(y < x)
\end{aligned}$$

(a) Wandeln Sie die Formeln in Skolemnormalform um.

(b) Übersetzen Sie das Ergebnis aus (a) in die Aussagenlogik und beweisen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, daß die Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ unerfüllbar ist.

Hinweis. Überlegen Sie sich zu erst intuitiv, warum die Formelmenge nicht erfüllbar sein kann.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Signatur $S = \{f, 0\}$ mit einem einstelligen Funktionssymbol f und einer Konstanten 0. Beginnend mit einem Element x einer S-Struktur betrachten wir die Folge $x, f(x), f^2(x), \dots$ und untersuchen, wie lange es dauert bis der Wert 0 erreicht wird.

(a) Geben Sie für jedes $n > 0$ eine Formel $\varphi_n(x)$ an, die sagt, daß in der Folge $x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)$ der Wert 0 nicht vorkommt.

(b) Geben Sie eine Satzmenge Φ an, welche besagt, daß es für jedes $n > 0$ ein x gibt, so daß, wenn wir mit x beginnen, der Wert 0 frühestens nach n Schritten erreicht.

(c) Beweisen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, daß es keine Satzmenge Φ gibt, welche ausdrückt, daß für jedes x schließlich die 0 erreicht wird, d. h., daß es kein x gibt, so daß $f^n(x) \neq 0$ für alle n.

(Die Collatz-Vermutung behauptet, daß die durch die Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$f(n) := \begin{cases} (n-1)/2 & \text{für ungerade } n\,, \\ 3(n+1) & \text{für gerade } n\,, \end{cases}$$

erzeugte Folge für jede natürliche Zahl schließlich 0 ergibt. Bis jetzt konnte diese Vermutung weder bewiesen noch widerlegt werden.)