Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Achim Blumensath
Tobias Löw

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006

Übung 6
Formale Grundlagen der Informatik II

Aufgabe 1

Sei $\mathcal{A}$ eine S-Struktur. Jeder S-Term $t(\bar{x})$ mit freien Variablen $x_1, \dots, x_n$ definiert auf $\mathcal{A}$ die Funktion $(a_1, \dots, a_n) \mapsto t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]$ (vgl. Skript S. 6).

(a) Sei $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1, <)$. Geben Sie Terme an, welche Funktionen mit den folgenden Eigenschaften definieren.

  (i) Eine Funktion $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, so daß für $a < a'$ gilt $f(a,b) < f(a',b)$ und $f(b,a) < f(b,a')$.

  (ii) Eine Funktion $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ mit $f(a,a) = a$ und $f(a,b) \neq a$ für alle $b \neq a$.

  (iii) Eine Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(a) + f(b) < f(a+b)$ für alle $a, b \geq 0$.

(b) Welche Funktionen definieren Ihre Terme aus (a) in der Struktur $\mathcal{W} = (\{0,1\}^*, g, h, k, \varepsilon, 0, \preceq)$ mit

$$g(x,y) := xy\,, \qquad h(x,y) := \begin{cases} x & \text{falls } |x| \geq |y|\,, \\ y & \text{sonst}\,, \end{cases} \qquad k(x,y) := yx\,,$$

$$x \preceq y \quad :\text{gdw} \quad y = xz\,,\ \text{für ein } z \quad (x \text{ Präfix von } y)$$

Aufgabe 2

Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <)$. Eine Formel $\varphi(x,y)$ definiert in $\mathcal{R}$ die Relation

$$[\![\varphi]\!] := \{\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{R} \models \varphi[a,b] \,\}\,.$$

(a) Geben Sie Formeln an, die die folgenden Relationen in $\mathbb{R}^2$ definieren:

(i) Einen Kreis mit Radius 2 um den Ursprung.

(ii) Eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung 2/3.

(iii) Die Strecke, welche vom Punkt $(1,2)$ bis zum Kreis aus (i) führt und senkrecht auf diesem steht.

(b) Welche Relation definiert die Formel

$$\varphi(x,y) := (x > 0 \land y > 0 \land x \cdot x + y \cdot y > 1) \lor x = y + y\,?$$