Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Achim Blumensath
Tobias Löw

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2006
3. Mai 2005

Formale Grundlagen der Informatik II

Drittes Übungsblatt

Präsenzübungen

(P 1) 3-Färbbarkeit

Wir betrachten einen Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge V und Kantenrelation $E \subseteq V \times V$. Eine 3-Färbung von V ist eine Abbildung $F : V \to \{1, 2, 3\}$ derart, dass für alle $(u, v) \in E$ gilt: $F(u) \neq F(v)$ (benachbarte Knoten haben verschiedene Farben). Eine 3-Färbung einer Teilmenge $V_0 \subseteq V$ der Knotenmenge ist genauso definiert.

Zeigen Sie: Ein Graph mit abzählbar unendlicher Knotenmenge V hat genau dann eine 3-Färbung, wenn es auf jeder endlichen Teilmenge $V_0 \subseteq V$ eine 3-Färbung gibt.

Hinweis: Um AL-Kompaktheit anzuwenden, kodiert man Knotenfarben durch Aussagenvariablen (für alle $v \in V$ und $f \in \{1, 2, 3\}$ ist $p_{v,f}$ wahr, falls der Konten v mit der Farbe f gefärbt ist) und beschreibt die Bedingungen an eine 3-Färbung durch AL-Formeln.

Bestimmen Sie dafür die Formelmengen zu folgenden Aussagen:

- jeder Knoten hat mindestens eine Farbe
- jeder Knoten hat höchstens eine Farbe
- benachbarte Knoten haben verschiedene Farben

(P 2) Klauselmengen

Formen Sie folgende AL-Formeln in äquivalente KNF und Klauselmengen um.

(a) $((p \wedge \neg q) \vee s) \to ((\neg r \wedge q) \vee \neg s)$

(b) $(\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

(P 3) Klauselmengen

Bestimmen Sie die Anzahl aller möglichen Klauselmengen in n Variablen, wobei

(a) alles erlaubt ist. (Wie z. B. $\big\{\{p, \neg p\}, \dots\big\}$.)

(b) in jeder Klausel jede Variable höchstens einmal vorkommt. (D. h. die Klausel $\{p, \neg p\}$ ist *nicht* erlaubt.)

(c) in jeder Klausel jede Variable genau einmal vorkommt.

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der Anzahl verschiedener n-stelliger boolescher Funktionen.