Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Achim Blumensath
Tobias Löw

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006

Hausübung 2
Formale Grundlagen der Informatik II

Abgabe: am 4. July in der Vorlesung
Bitte geben Sie die Nummer ihrer Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

Wir betrachten ein System (etwa einen Microcontroller) mit Zuständen Q. Das Verhalten dieses Systems kann als Menge $S \subseteq Q^*$ aller möglichen endlichen Zustandsfolgen beschrieben werden, welche das System durchlaufen kann. Mit $\leq\ \subseteq S \times S$ bezeichnen wir die *Präfixordnung* auf S ($u \leq v$ gilt, wenn u ein Anfangsstück von v ist). (Offensichtlich ist die Menge S präfixabgeschlossen, d. h. aus $x \leq y \in S$ folgt $x \in S$.) Für jeden Zustand $q \in Q$ sei $P_q \subseteq S$ die Menge aller Folgen, deren letztes Element q ist. Wir betrachten die Struktur $\mathcal{S} = (S, \leq, (P_q)_{q \in Q})$. Geben Sie Formeln an, welche ausdrücken, daß

(a) y der direkte Nachfolger von x ist, d. h. $y = xq$ für einen Zustand $q \in Q$;

(b) das System keine Deadlocks enthält, d. h. jede Zustandsfolge fortgesetzt werden kann;

(c) jede Zustandsfolge eine Fortsetzung hat, welche ihrerseits keine Fortsetzung besitzt, deren letztes Element q ist.

Aufgabe 2

Sei R ein zweistelliges Relationssymbol, P ein einstelliges Relationssymbol, f ein einstelliges Funktionssymbol und c eine Konstante. Geben Sie zu den folgenden Formeln jeweils erfüllbarkeitsäquivalente Formeln in Skolemnormalform an.

(a) $\forall x(\forall y Rxy \to \exists y(Rxy \land Py))$

(b) $\forall x(Rcx \to \exists y(Rcy \land \forall z(Rzy \to Rfzx)))$

(c) $\forall x \forall y(Rxy \to \exists z \exists u(Rxz \land Rzu \land Ruy))$

(d) $\forall x \exists y \forall z \exists u(Rxy \land (Pz \to (Ryz \land Ruz)))$

Aufgabe 3

(a) Geben Sie eine Formelmenge Φ an, so daß genau dann $\mathcal{G} \vDash \Phi$ gilt, wenn $\mathcal{G} = (V, E)$ ein ungerichteter Graph (d. h. die Kantenrelation E ist symmetrisch) ist, welcher keinen Kreis enthält.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, daß es keine Formelmenge Φ gibt, so daß $\mathcal{G} \vDash \Phi$ genau dann gilt, wenn $\mathcal{G}$ ein ungerichteter Graph ist, welcher mindestens einen Kreis enthält.

Aufgabe 4

Betrachten Sie die Formeln

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \forall y((Px \land Py) \to Rxy) \\
\varphi_2 &:= \forall x \forall y \exists z(Rxz \land Rzy) \\
\varphi_3 &:= \forall x \forall y(Rxy \to (Px \lor Py)) \\
\psi &:= \forall x \exists y \exists z(Rxy \land Ryz \land Rzx)
\end{aligned}$$

Gilt $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \vDash \psi$? Führen Sie entweder einen Beweis mit Hilfe der Grundinstanzenresolution, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 5

Sei Φ die Menge der folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \to x < z)\\
&\forall x \neg(x < x)\\
&\forall x \forall y(Exy \to x < y)\\
&\forall x \exists y Exy
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, daß

  (i) in jedem Modell $(A, E, <)$ von Φ die Relation E keinen Kreis enthält;

  (ii) Φ kein endliches Modell hat.

(b) Konstruieren Sie ein Herbrandmodell von Φ.

(c) Sei

$$\psi := \forall x \forall y(\neg\exists z(x < z \wedge z < y) \to Exy)\,.$$

Gilt ψ in dem Modell aus (b)?
Beweisen Sie, daß $\Phi \vDash \psi$, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 6

Leiten Sie die folgenden Sequenzen ab:

(a) $\vdash \exists x(\neg Rx \vee \forall x Rx)$

(b) $\forall x \forall y \forall z(x = y \vee x = z \vee y = z) \vdash \forall x(fx = fffx)$

(c) $\exists x\varphi \wedge \exists x\psi \vdash \exists x(\varphi \wedge \psi)$, für beliebige FO-Formeln φ, ψ mit $x \notin \mathsf{frei}(\varphi)$.