Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Achim Blumensath
Tobias Löw

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006
25. April 2006

Formale Grundlagen der Informatik II

Erstes Übungsblatt

Hausübungen

Abgabe in der Vorlesung am 23. Mai 2006

(H 1)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Konstruieren Sie induktiv über n aussagenlogische Formeln

$$\varphi_n(x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n, z_0, \ldots, z_n, z_{n+1}),$$

welche genau dann wahr sind, wenn die Summe der in $\bar{x}$ und $\bar{y}$ kodierten Binärzahlen gleich $\bar{z}$ ist. ($\bar{x}$ kodiert die Zahl $\sum_i x_i 2^i$.)

(H 2)

Wir definieren folgende partielle Ordnung auf aussagenlogischen $\mathcal{V}_n$-Interpretationen:

$$\mathfrak{I} \leq \mathfrak{I}' \quad \text{:gdw.} \quad \mathfrak{I}(p) \leq \mathfrak{I}'(p) \text{ für alle Variablen } p \in \mathcal{V}_n$$

Eine AL_n-Formel φ heißt *monoton*, wenn für alle Interpretationen $\mathfrak{I} \leq \mathfrak{I}'$ gilt:

$$\varphi^{\mathfrak{I}} \leq \varphi^{\mathfrak{I}'}.$$

Beweisen Sie per Induktion über den Formelaufbau, dass jede aussagenlogische Formel φ, in der kein Negationszeichen vorkommt, monoton ist.
Bemerkung: Jede monotone Formel ist äquivalent zu einer Formel ohne Negationszeichen.

(H 3)

(a) Überprüfen Sie mit Resolution, ob folgende AL-Formeln erfüllbar sind
   (i) $(p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \rightarrow r) \wedge \neg((r \wedge \neg s) \vee q) \wedge (r \leftrightarrow s)$
   (ii) $(p \wedge q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q \vee r)$

(b) Gegeben seien folgende AL-Formeln:

$$\varphi := (p \vee \neg r) \vee \neg(\neg p \vee q)$$
$$\psi := q \wedge r \wedge (\neg p \rightarrow r)$$

Zeigen Sie mit Resolution, dass $p \wedge q$ ist eine Folgerung aus der Formelmenge $\{\varphi, \psi\}$.

(H 4)

Gegeben sei die folgende Menge von nicht-negativen Hornklauseln:

$$M := \{\{\neg t, q\}, \{r\}, \{\neg r, t\}, \{p, \neg u, \neg s\}, \{\neg t, \neg q, r, \neg s\}, \{\neg r, \neg p, u\}, \{\neg t, s, \neg r, \neg q\}\}$$

(a) Bestimmen Sie eine minimale Belegung für M.

(b) Betrachten Sie nun folgende Mengen von negativen Hornklauseln:

$$N_1 := \{\{\neg p\}, \{\neg t, \neg u\}\}, \qquad N_2 := \{\{\neg u, \neg t, \neg s\}, \{\neg q, \neg u\}, \{\neg s, \neg r, \neg t\}\}\,.$$

Überprüfen Sie für $i \in \{1, 2\}$, ob die minimale Belegung aus (a) die Klauselmenge $M \cup N_i$ erfüllt.

(H 5)

Zu gegebener unendlicher Folge $s := (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Zeichen aus einem Alphabet Σ bezeichnen wir für $i \in \mathbb{N}$ mit $s(i)$ das Wort $a_0a_1 \dots a_{i-1}a_i$.

(a) Zeigen Sie, dass es zu jedem (endlichen) Alphabet Σ und unendlicher Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ eine unendliche Folge s von Zeichen gibt, sodass für unendlich viele $i \in \mathbb{N}$ das Wort $s(i)$ Präfix eines Wortes aus L ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Sprache $\hat{L}$ aller Präfixe von Wörtern in L. Die Bedingung an s besagt, dass $s(i) \in \hat{L}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(b) Gilt die Aussage in (a) auch, wenn man fordert, dass für unendlich viele $i \in \mathbb{N}$ das Wort $s(i)$ in L liegt (anstatt ein Präfix zu sein)?

(H 6)

(a) Zeigen Sie, dass folgende Regeln korrekt sind.

(i) $\dfrac{\Gamma \vdash \emptyset}{\Gamma \vdash \varphi}$ (ex falso quodlibet) $\qquad$ (ii) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \chi}{\Gamma, \varphi \vdash \chi}$

(b) Geben Sie ein Verfahren an, das eine $\mathcal{SK}$-Ableitung von $\Gamma \vdash \emptyset$ in eine $\mathcal{SK}$-Ableitung von $\Gamma \vdash \varphi$ transformiert.

(c) Geben Sie eine „direkte Simulation“ von Regel (ii) in $\mathcal{SK}^+$ an, d. h. geben Sie einen Ableitungsbaum in $\mathcal{SK}^+$ mit Wurzel $\Gamma, \varphi \vdash \chi$ an, dessen Blätter nur mit Axiomen oder $\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \chi$ beschriftet sind.

(d) Begründen Sie, warum Regel (ii) in $\mathcal{SK}$ nicht direkt simulierbar ist. D. h. zeigen Sie, dass es keinen $\mathcal{SK}$ Ableitungsbaum mit Wurzel $\Gamma, \varphi \vdash \chi$ gibt, dessen Blätter nur mit Axiomen oder $\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \chi$ beschriftet sind.

Hinweis: Betrachten Sie hierfür die Länge der Formeln von Prämisse und Konklusion der $\mathcal{SK}$ Regeln.