Substitution: das semantisch korrekte Einsetzen von Termen

Gesucht: für $t \in T(S)$ und $\varphi(x) \in \mathrm{FO}(S)$,
$\varphi' := \varphi(t/x) \in \mathrm{FO}(S)$ so, dass:

$$\boxed{\mathfrak{I} \models \varphi' \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{I}[x \mapsto t^{\mathfrak{I}}] \models \varphi.}$$

Vorsicht! Naives Ersetzen von x durch t tut's nicht!

- beachte, dass x frei und gebunden auftreten kann.
- beachte, dass Variablen in t nicht fälschlich gebunden werden.

Methode
Induktive Definition, die intern gebundene Variablen so umbenennt, dass Konflikte vermieden werden.

Beispiel: $\varphi(x) = \forall y \big(Exy \wedge \exists x \neg Exy\big)$

$\varphi(fy/x) = ?$

Satz über die Skolemnormalform

Jedes $\varphi \in \mathrm{FO}$ ist *erfüllbarkeitsäquivalent* zu einer universell-pränexen Formel φ' (in einer erweiterten Signatur).

Man erhält φ' aus einer zu φ logisch äquivalenten Formel in PNF durch Substitution von *Skolemfunktions*termen für existentiell abquantifizierte Variablen.

Zur Erfüllbarkeitsäquivalenz gilt sogar:

- $\varphi' \models \varphi$.
- jedes Modell von φ lässt sich zu Modell von φ' erweitern.

Skolemisierung: alles universell ?

universell-pränexe Formeln: $\forall x_{i_1} \dots \forall x_{i_k} \psi$, ψ quantorenfrei

- nicht jede Formel ist logisch äquivalent zu universell-pränexer Formel, z.B. $\varphi = \forall x \exists y\, Exy$
- aber jede Formel ist *erfüllbarkeitsäquivalent* zu universell-pränexer Formel.

Idee: neue Funktionen, die *ggf.* Existenzbeispiele liefern
[im Semantik Spiel: $\exists$-Züge für **V**]

Beispiel

$\varphi = \forall x \exists y\, Exy \quad \longmapsto \quad \varphi' = \forall x\, Exfx$ (für *neues* f)

dann gilt: (i) $\mathcal{A}' = (A, E^{\mathcal{A}}, \dots, f^{\mathcal{A}'}) \models \varphi' \;\Rightarrow\; \mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}}, \dots) \models \varphi$

(ii) $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}}, \dots) \models \varphi \;\Rightarrow$
es gibt eine Interpretation von f über A so, dass
$\mathcal{A}' = (A, E^{\mathcal{A}}, \dots, f^{\mathcal{A}'}) \models \varphi'$

Satz von Herbrand

Erfüllbarkeit von universellen $\mathrm{FO}^{\neq}$-Sätzen in Herbrand-Modellen

- S enthalte mindestens ein Konstantensymbol
- $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0^{\neq}(S)$: Menge von *universellen, gleichheitsfreien* Sätzen

Herbrand-Struktur (Erinnerung):
die S_{F}-Termstruktur $\mathcal{T}_0(S)$ über $T_0(S)$ (variablenfreie S-Terme)

Herbrand-Modell:
Expansion der Termstruktur $\mathcal{T}_0(S)$ zu S-Struktur,
Interpretation von R (n-st.) als Teilmenge von $T_0(S)^n$

Satz von Herbrand

Φ erfüllbar $\Leftrightarrow$ es existiert ein Herbrand-Modell
$$\mathcal{H} = \big(\mathcal{T}_0(S), (R^{\mathcal{H}})_{R \in S}\big) \models \Phi.$$

"$\Leftarrow$": offensichtlich.
"$\Rightarrow$": geeignete Interpretationen $R^{\mathcal{H}}$ aus geg. Modell $\mathcal{A} \models \Phi$.

Erfüllbarkeit: Reduktion auf AL

Reduktions-Idee: $\Phi \subseteq \mathsf{FO}(S)$ (bel. Formelmenge)

erf.-äquiv.

$\Phi' \subseteq \mathsf{FO}_0(S_1)$ (Satzmenge)

erf.-äquiv.

$\Phi'' \subseteq \mathsf{FO}_0^{\neq}(S_2)$ (gleichheitsfrei)

erf.-äquiv.

$\Phi''' \subseteq \mathsf{FO}_0^{\neq}(S_3)$ (universell(-pränex))

$\boxed{\Phi \text{ erfüllbar } \Leftrightarrow \Phi''' \text{ erfüllbar } \Leftrightarrow \Phi''' \text{ in Herbrand-Modell erfüllbar}}$

Bedingungen an Herbrand-Modell lassen sich in AL kodieren!

Erfüllbarkeit: Reduktion auf AL (fortges.)

o.B.d.A.: $\Phi \subseteq \mathsf{FO}_0^{\neq}(S)$, universell-pränex, S habe Konstanten

Φ erfüllbar $\Leftrightarrow$ Φ hat ein Herbrand-Modell $\mathcal{H} = \big(\mathcal{T}_0(S), (R^{\mathcal{H}})_{R\in S}\big) \models \Phi$

$\Leftrightarrow$ für alle $R \in S$ (n-st.) existieren $R^{\mathcal{H}} \subseteq T_0(S)^n$, sodass $\mathcal{H} = \big(\mathcal{T}_0(S), (R^{\mathcal{H}})_{R\in S}\big) \models \Phi$

$\mathcal{V} := \{p_\alpha \colon \alpha = \mathtt{R}\mathtt{t}_1 \ldots \mathtt{t}_\mathtt{n}; R \in S; t_1, \ldots, t_n \in T_0(S) \text{ für } n\text{-stelliges } R\}$

$\mathcal{V}$-Interpretationen $\mathcal{I}$ beschreiben mögliche $\mathcal{H}$

bijektive Korrepondenz $\mathcal{H} \leftrightarrow \mathcal{I}$:

von $\mathcal{I}$ zu $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathcal{I})$: $R^{\mathcal{H}} = \big\{(t_1, \ldots, t_n) \in T_0(S)^n \colon \mathfrak{I}(p_{\mathtt{R}\mathtt{t}_1\ldots\mathtt{t}_\mathtt{n}}) = 1\big\}$

von $\mathcal{H}$ zu $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathcal{H})$:

$$\mathfrak{I} \colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{B}, \quad p_\alpha \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{H} \models \alpha, \\ 0 & \text{falls } \mathcal{H} \models \neg\alpha. \end{cases}$$

Erfüllbarkeit: Reduktion auf AL (fortges.)

für $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \, \xi(x_1, \ldots, x_n) = \forall \mathbf{x}\, \xi(\mathbf{x})$, ξ quantorenfrei
$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathcal{I})$:

$\mathcal{H} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{H} \models \xi[\mathbf{t}]$ für alle $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in T_0(S)^n$

gdw. $\mathcal{I} \models \xi(\mathbf{t})^{\mathsf{AL}}$ für alle $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in T_0(S)^n$

erhalte $\xi(\mathbf{t})^{\mathsf{AL}} \in \mathsf{AL}(\mathcal{V})$ aus $\xi(\mathbf{t})$ durch Ersetzen von Atomen $\alpha = \mathtt{R}\ldots$ durch AL-Variablen $p_\alpha = p_{\mathtt{R}\ldots}$

Beispiel

$$\left.\begin{array}{r} \xi = Rxfy \vee (Ufx \to Wxyfz) \\ \mathbf{t} = (c, fc, d) \text{ für } (x, y, z) \end{array}\right\} \ \xi(c, fc, d)^{\mathsf{AL}} = p_{\mathtt{Rcffc}} \vee (p_{\mathtt{Ufc}} \to p_{\mathtt{Wcfcfd}})$$

für $[\![\Phi]\!]^{\mathsf{AL}} := \bigcup_{\forall \mathbf{x}\xi \in \Phi} \{\xi(\mathbf{t})^{\mathsf{AL}} \colon \mathbf{t} \text{ in } T_0(S)\}$ gilt:

$\boxed{\Phi \text{ erfüllbar gdw. } [\![\Phi]\!]^{\mathsf{AL}} \text{ erfüllbar}}$