Semantik von $\mathrm{FO}(S)$

Wahrheitswerte $\varphi^{\mathfrak{I}}$ für FO(S)-Formeln über S-Interpretation $\mathfrak{I}$

induktive Definition von $\varphi^{\mathfrak{I}}$

atomare φ:	$(t_1 = t_2)^{\mathfrak{I}} = 1$ gdw. $t_1^{\mathfrak{I}} = t_2^{\mathfrak{I}}$. $(Rt_1 \dots t_n)^{\mathfrak{I}} = 1$ gdw. $(t_1^{\mathfrak{I}}, \dots, t_n^{\mathfrak{I}}) \in R^{\mathcal{A}}$.
Negation:	$(\neg\varphi)^{\mathfrak{I}} := 1 - \varphi^{\mathfrak{I}}$.
Konjunktion:	$(\varphi \wedge \psi)^{\mathfrak{I}} := \min(\varphi^{\mathfrak{I}}, \psi^{\mathfrak{I}})$.
Disjunktion:	$(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} := \max(\varphi^{\mathfrak{I}}, \psi^{\mathfrak{I}})$.
Quantoren:	$(\exists x\varphi)^{\mathfrak{I}} = \max\big(\varphi^{\mathfrak{I}[x\mapsto a]} : a \in A\big)$. $(\forall x\varphi)^{\mathfrak{I}} = \min\big(\varphi^{\mathfrak{I}[x\mapsto a]} : a \in A\big)$.

Sprech- und Schreibweisen für $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$: φ wahr unter $\mathfrak{I}$
$\mathfrak{I}$ erfüllt φ
$\mathfrak{I}$ Modell von φ
$\mathfrak{I} \models \varphi$

Semantische Grundbegriffe

übertragen sich direkt von AL auf FO!

Folgerungsbeziehung, $\varphi \models \psi$: f.a. $\mathfrak{I}$ gilt $\Big(\mathfrak{I} \models \varphi \;\Rightarrow\; \mathfrak{I} \models \psi\Big)$.

logische Äquivalenz, $\varphi \equiv \psi$: f.a. $\mathfrak{I}$ gilt $\Big(\mathfrak{I} \models \varphi \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{I} \models \psi\Big)$.

vgl. *Erfüllbarkeitsäquivalenz* (später)

Erfüllbarkeit, $\varphi \in$ SAT(FO): es gibt $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I} \models \varphi$.

Allgemeingültigkeit: für alle $\mathfrak{I}$ gilt $\mathfrak{I} \models \varphi$.

Äquivalent?
- $\forall x\forall y\varphi(x,y) \;\equiv\; \forall y\forall x\varphi(x,y)$?
- $\forall x\varphi \;\equiv\; \neg\exists x\neg\varphi$?

Erfüllbar?
- $\forall x\exists y Rxy \;\wedge\; \neg\exists y\forall x Rxy$?
- $\forall x\forall y(Rxy \;\wedge\; \neg Ryx)$?
- $\forall x\forall y(Rxy \leftrightarrow \neg Ryx)$?

Belegungen und freie Variablen

Werte der Belegung $\beta(x) \in A$ über $\mathcal{A}$ nur relevant für $x \in \mathrm{frei}(\varphi)$.

Für $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{FO}_n(S)$ ($\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \mathcal{V}_n = \{x_1, \dots, x_n\}$),
$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) = (\beta(x_1), \dots, \beta(x_n)) \in A^n$:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \quad \text{:gdw.} \quad \left[\begin{array}{l} (\mathcal{A}, \beta) \models \varphi \text{ für ein/alle } \beta \text{ mit} \\ \beta(x_i) = a_i \text{ für } i = 1, \dots n \end{array}\right].$$

Bsp.: $\varphi(x) = \forall y Rxy$ beschreibt eine Eigenschaft von x,
$\varphi^{\mathfrak{I}}$ hängt nicht von $\beta(y)$ ab, aber von $\beta(x)$

speziell für Sätze ($\mathrm{frei}(\varphi) = \emptyset$): $\varphi^{\mathfrak{I}}$ hängt nur von $\mathcal{A}$ ab,
$\mathcal{A} \models \varphi$ oder $\mathcal{A} \not\models \varphi$
unabhängig von β

Variationen: relationale Semantik (Prädikatenlogik!)

mit $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{FO}_n(S)$ und S-Struktur $\mathcal{A}$
assoziiere die n-stellige Relation

$$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{A}} := \Big\{\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n : \mathcal{A} \models \varphi[\mathbf{a}]\Big\} \subseteq A^n$$

$\longrightarrow$ relationale Algebra

Korrespondenzen:

Konjunktion $\wedge$	—	Durchschnitt $\cap$
Disjunktion $\vee$	—	Vereinigung $\cup$
Negation $\neg$	—	Komplement
existenzielle Quant. $\exists$	—	Projektion

$\longrightarrow$ relationale Datenbanken, SQL

Variationen: Spielsemantik (model checking $\varphi \in$ NNF)

Spiel zwischen Verifizierer und Falsifizierer zu $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{FO}_n(S)$ über $\mathcal{A}$

Spielpositionen: $(\psi, \mathbf{a}) \in \mathrm{SF}(\varphi) \times A^n$

Züge in Position $(\psi, \mathbf{a})$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$:

$\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$	**F** am Zug zieht nach $(\psi_1, \mathbf{a})$ oder nach $(\psi_2, \mathbf{a})$.
$\psi = \psi_1 \vee \psi_2$	**V** am Zug zieht nach $(\psi_1, \mathbf{a})$ oder nach $(\psi_2, \mathbf{a})$.
$\psi = \forall x_i \psi_0$	**F** am Zug zieht nach einem $(\psi_0, \mathbf{a}[x_i \mapsto a_i'])$.
$\psi = \exists x_i \psi_0$	**V** am Zug zieht nach einem $(\psi_0, \mathbf{a}[x_i \mapsto a_i'])$.

Spiel-Ende in Positionen $(\psi, \mathbf{a})$, ψ atomar oder negiert atomar.

Gewinner: **V** gewinnt in Endposition $(\psi, \mathbf{a})$, wenn $\mathcal{A} \models \psi[\mathbf{a}]$.
F gewinnt in Endposition $(\psi, \mathbf{a})$, wenn $\mathcal{A} \not\models \psi[\mathbf{a}]$.

Satz: $\mathcal{A} \models \psi[\mathbf{a}] \Leftrightarrow$ **V** hat Gewinnstrategie in Position $(\psi, \mathbf{a})$.

FO mit oder ohne $=$?

FO und $\mathrm{FO}^{\neq}$

- Gleichheit ist Bestandteil der *Logik* in FO;
  anders als interpretierte Relationen $R \in S$.
- natürliche Formalisierungen brauchen oft $=$,
  z.B.: Injektivität, algebraische Identitäten, ...
- dennoch möglich: Reduktion von FO auf $\mathrm{FO}^{\neq}$;
  Idee: modelliere $=$ durch interpretierte Relation $\sim$.

  $\widehat{S} := S \cup \{\sim\}$

  Verträglichkeitsbedingungen:
  $\sim$ Kongruenzrelation bzgl. aller $R, f \in S$

  erhalte Modelle $\mathcal{A}_0$ mit echter Gleichheit als $\sim$-Quotientien:
  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}/{\sim^{\mathcal{A}}} = \big(A/{\sim^{\mathcal{A}}}, \ldots, [c^{\mathcal{A}}]_{\sim^{\mathcal{A}}}, \ldots, f^{\mathcal{A}}/{\sim^{\mathcal{A}}}, \ldots, R^{\mathcal{A}}/{\sim^{\mathcal{A}}}\big)$
  $\sim$-Äquivalenzklassen als Elemente

Pränexe Normalform: alle Quantoren nach vorne

$\varphi \in \mathrm{FO}(S)$ in *pränexer Normalform* (PNF):

$$\varphi = Q_1 x_{i_1} \ldots Q_k x_{i_k} \psi,$$
$$Q_i \in \{\forall, \exists\},\ k \in \mathbb{N},\ \psi \text{ quantorenfrei.}$$

Beispiele

$$\exists y(Exy \wedge \forall x(Eyx \to x = y)) \quad \equiv \quad \exists y \forall z\Big(Exy \wedge (Eyz \to z = y)\Big)$$
$$\exists y \forall x Exy \vee \neg \exists y Exy \quad \equiv \quad \exists y_1 \forall y_2 \forall y_3\Big(Ey_1y_2 \vee \neg Exy_3\Big)$$

Satz über PNF

Jede FO-Formel ist logisch äquivalent zu einer Formel in PNF.

Beweis durch Induktion über $\varphi \in \mathrm{FO}(S)$.

Substitution: das semantisch korrekte Einsetzen von Termen

Gesucht: für $t \in T(S)$ und $\varphi(x) \in \mathrm{FO}(S)$,
$\varphi' := \varphi(t/x) \in \mathrm{FO}(S)$ so, dass:

$$\mathfrak{I} \models \varphi' \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{I}[x \mapsto t^{\mathfrak{I}}] \models \varphi.$$

Vorsicht! Naives Ersetzen von x durch t tut's nicht!

- beachte, dass x frei und gebunden auftreten kann.
- beachte, dass Variablen in t nicht fälschlich gebunden werden.

Methode
Induktive Definition, die intern gebundene Variablen so umbenennt, dass Konflikte vermieden werden.

Beispiel: $\varphi(x) = \forall y\Big(Exy \wedge \exists x \neg Exy\Big)$

$\varphi(fy/x) = ?$