Teil 2: Logik erster Stufe (Prädikatenlogik), FO

Gegenstandsbereich:

S-Strukturen
mit Belegungen für Element-Variablen

Ausdrucksmöglichkeiten:

atomare Aussagen über Terme
Funktionen, Konstanten, Variablen

$\wedge, \vee, \neg$ (wie in AL)

Quantifizierung $\forall, \exists$ über Elemente

- strukturierte Formalisierung komplexerer Eigenschaften
- modulare Semantik
- korrekte und vollständige Beweiskalküle
- nicht mehr entscheidbar

Beispiele

unter vielen anderen

Wortstrukturen zu $S = \{<\} \cup \{P_a \colon a \in \Sigma\}$

$$w = a_1 \ldots a_n \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{W} = \big(\{1, \ldots, n\}, <^{\mathcal{W}}, (P_a^{\mathcal{W}})_{a \in \Sigma}\big),$$
$$<^{\mathcal{W}} = \{(i,j) \colon 1 \leqslant i < j \leqslant n\},$$
$$P_a^{\mathcal{W}} = \{i \colon a_i = a\}.$$

Graphen zu $S = \{E\}$

$$u \bullet \xrightarrow{(u,v) \in E^{\mathcal{G}}} \bullet\, v$$

$\mathcal{G} = \big(V, E^{\mathcal{G}}\big)$,
mit Knotenmenge V
Kantenrelation $E^{\mathcal{G}} \subseteq V \times V$.

Transitionssysteme zu $S = \{E_a \colon a \in \Sigma\}$

$$(\Sigma, Q, \Delta) \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{A} = \big(Q, (E_a^{\mathcal{A}})_{a \in \Sigma}\big),$$
$$E_a^{\mathcal{A}} = \{(q, q') \colon (q, a, q') \in \Delta\}.$$

Relationale Datenbanken, . . .

Strukturen zu Signatur S

Symbole:	$x, y, z, \ldots, x_1, x_2, x_3, \ldots$	Variablensymbole
	$c, d, e, \ldots$	Konstantensymbole
	$f, g, \ldots$	Funktionssymbole
	$P, Q, R, \ldots$	Relationssymbole

Signatur S:
Auswahl von Konstanten-, $\underbrace{\text{Funktions- und Relationssymbolen}}_{\text{mit spezifizierten Stelligkeiten}}$

S-Struktur:

$$\mathcal{A} = (A, c^{\mathcal{A}}, \ldots, f^{\mathcal{A}}, \ldots, R^{\mathcal{A}}, \ldots)$$

besteht aus: Trägermenge $A \neq \emptyset$
für $c \in S$: ausgezeichnetes Element $c^{\mathcal{A}} \in A$.
für n-st. $f \in S$: n-st. Funktion $f^{\mathcal{A}} \colon A^n \to A$.
für n-st. $R \in S$: n-st. Relation $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$.

Beispiel: $\mathcal{N} = \big(\mathbb{N}, +^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}, <^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}}\big)$ zu $S = \{+, \cdot, <, 0, 1\}$

Terme und Belegungen

Variablen aus $\mathcal{V} := \{x_1, x_2, \ldots\}$ bzw. $\mathcal{V}_n := \{x_1, \ldots, x_n\}$

S-Terme

$T(S)$ (über Variablen aus $\mathcal{V}$) induktiv erzeugt durch:

$x \in T(S)$	für $x \in \mathcal{V}$.
$c \in T(S)$	für $c \in S$.
$ft_1 \ldots t_n \in T(S)$	für $f \in S$ (n-st.), $t_1, \ldots, t_n \in T(S)$.

$T_n(S) \subseteq T(S)$: S-Terme über Variablen aus $\mathcal{V}_n$.

Beispiele wohlgeformter S-Terme

$S = \{f, c\}$, f 2-st.: c, $ffccc$, $fcfcc$, . . . , x_{17}, fx_1c, ffx_5cx_2, . . .

$S = \{+, \cdot, 0, 1\}$, $+, \cdot$ 2-st.: $\cdot + 11 \; + + 111$,
$+ \cdot + + 111\, x_3\, x_1$, . . .

Konvention: Funktionsterme mit Klammern, 2-st. auch infix
$\big(((1 + 1) + 1) \cdot x_3 + x_1\big)$ statt $+ \cdot + + 111 x_3 x_1$

Belegungen: Interpretation von Termen

weisen den Variablensymbolen Elemente einer S-Struktur zu

Belegung
über S-Struktur $\mathcal{A} = \big(A, c^{\mathcal{A}}, \dots, f^{\mathcal{A}}, \dots\big)$:

$$\begin{array}{rcl} \beta\colon \mathcal{V} & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & \beta(x) \end{array}$$

S-Interpretation: S-Struktur + Belegung $\qquad \mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$

Semantik von Termen

induktiv über $T(S)$ für gegebene S-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathcal{A}, \beta)$:

Interpretation von $t \in T(S)$: $t^{\mathfrak{I}} \in A$.

- $t = x$ ($x \in \mathcal{V}$ Variable) : $\quad t^{\mathfrak{I}} := \beta(x)$.
- $t = c$ ($c \in S$ Konstante) : $\quad t^{\mathfrak{I}} := c^{\mathcal{A}}$.
- $t = ft_1 \dots t_n$ ($f \in S$, n-st.) : $\quad t^{\mathfrak{I}} := f^{\mathcal{A}}\big(t_1^{\mathfrak{I}}, \dots, t_n^{\mathfrak{I}}\big)$.

Logik erster Stufe: Syntax von $\mathrm{FO}(S)$

Symbole: Symbole in S zusammen mit Variablen $x \in \mathcal{V}$,
AL-Junktoren, $=$, $\forall, \exists$, Klammern

Induktive Definition der Menge der $\mathrm{FO}(S)$ Formeln:

- **atomare Formeln**: für $t_1, t_2 \in T(S)$: $\quad t_1 = t_2 \in \mathrm{FO}(S)$.

  für $R \in S$ (n-st.), $t_1, \dots, t_n \in T(S)$: $\quad Rt_1 \dots t_n \in \mathrm{FO}(S)$. (∗)
- **AL-Junktoren**: für $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}(S)$: $\quad \neg\varphi \in \mathrm{FO}(S)$.

  $(\varphi \wedge \psi) \in \mathrm{FO}(S)$.

  $(\varphi \vee \psi) \in \mathrm{FO}(S)$.
- **Quantifizierung**: für $\varphi \in \mathrm{FO}(S)$, $x \in \mathcal{V}$: $\quad \exists x\varphi \in \mathrm{FO}(S)$.

  $\forall x\varphi \in \mathrm{FO}(S)$.

Gleichheitsfreie Logik erster Stufe, $\mathrm{FO}^{\neq} \subseteq \mathrm{FO}$:
genauso, aber ohne Atome $t_1 = t_2$.

(∗) $n = 2$: auch infixe Notation

Die syntaktische Interpretation: Herbrand-Struktur

S funktional (ohne Relationssymbole)

Herbrand-Struktur
$\mathcal{T} = \mathcal{T}(S) = \big(T(S), \dots, c^{\mathcal{T}(S)}, \dots, f^{\mathcal{T}(S)}, \dots\big)$

- $c \in S$: $\quad c^{\mathcal{T}} := c \in T(S)$.
- $f \in S$ (n-st.) : $\quad \begin{array}{rcl} f^{\mathcal{T}}\colon T(S)^n & \longrightarrow & T(S) \\ (t_1, \dots, t_n) & \longmapsto & ft_1 \dots t_n. \end{array}$

Beobachtung

Übung 1.7, vgl. FG I

Für jede S-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} h\colon T(S) & \longrightarrow & A \\ t & \longmapsto & t^{\mathfrak{I}} \end{array}$$

ein Homomorphismus von $\mathcal{T}(S)$ nach $\mathcal{A}$.

Syntax: freie Variablen

$$\begin{array}{rcl} \text{frei}\colon \mathrm{FO}(S) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{V}) \\ \varphi & \longmapsto & \text{frei}(\varphi) \subseteq \mathcal{V} \end{array}$$

induktiv: frei(φ) := var(φ) für atomare φ.
frei($\neg\varphi$) := frei(φ).
frei($\varphi \wedge \psi$) = frei($\varphi \vee \psi$) := frei(φ) $\cup$ frei(ψ).
frei($\exists x\varphi$) = frei($\forall x\varphi$) := frei(φ) $\setminus \{x\}$.

Formeln ohne freie Variablen: *Sätze*.

$\mathrm{FO}_n(S) := \{\varphi \in \mathrm{FO}(S) \colon \text{frei}(\varphi) \subseteq \mathcal{V}_n\}$.

Schreibweise: $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ für $\varphi \in \mathrm{FO}_n(S)$.

Variablen in φ, die nicht frei vorkommen: *gebunden*

Bsp: frei($0 < fx$) = $\{x\}$
frei($\forall x \neg x = fx$) = $\emptyset$
frei($0 < fx \wedge \forall x \neg x = fx$) = $\{x\}$

Syntax: Quantorenrang

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{qr}\colon \mathsf{FO}(S) & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ \varphi & \longmapsto & \mathsf{qr}(\varphi) \in \mathbb{N} \end{array}$$

induktiv: $\mathsf{qr}(\varphi) = 0$ für atomares φ.
$\mathsf{qr}(\neg\varphi) := \mathsf{qr}(\varphi)$.
$\mathsf{qr}(\varphi \wedge \psi) = \mathsf{qr}(\varphi \vee \psi) := \max(\mathsf{qr}(\varphi), \mathsf{qr}(\psi))$.
$\mathsf{qr}(\exists x\varphi) = \mathsf{qr}(\forall x\varphi) := \mathsf{qr}(\varphi) + 1$.

Formeln von Quantorenrang 0 heißen *quantorenfrei*.

Bsp: $\mathsf{qr}(0 < fx) = 0$
$\mathsf{qr}(\forall x\exists y\, x < y) = 2$
$\mathsf{qr}(0 < fx \wedge \forall x\exists y\, x < y) = 2$

Semantik von $\mathrm{FO}(S)$

Wahrheitswerte $\varphi^{\mathfrak{I}}$ für FO(S)-Formeln über S-Interpretation $\mathfrak{I}$

induktive Definition von $\varphi^{\mathfrak{I}}$

atomare φ: $(t_1 = t_2)^{\mathfrak{I}} = 1$ gdw. $t_1^{\mathfrak{I}} = t_2^{\mathfrak{I}}$.
$(Rt_1 \dots t_n)^{\mathfrak{I}} = 1$ gdw. $(t_1^{\mathfrak{I}}, \dots, t_n^{\mathfrak{I}}) \in R^{\mathcal{A}}$.

Negation: $(\neg\varphi)^{\mathfrak{I}} := 1 - \varphi^{\mathfrak{I}}$.

Konjunktion: $(\varphi \wedge \psi)^{\mathfrak{I}} := \min(\varphi^{\mathfrak{I}}, \psi^{\mathfrak{I}})$.

Disjunktion: $(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} := \max(\varphi^{\mathfrak{I}}, \psi^{\mathfrak{I}})$.

Quantoren: $(\exists x\varphi)^{\mathfrak{I}} = \max\Big(\varphi^{\mathfrak{I}[x\mapsto a]}\colon a \in A\Big)$.

$(\forall x\varphi)^{\mathfrak{I}} = \min\Big(\varphi^{\mathfrak{I}[x\mapsto a]}\colon a \in A\Big)$.

Sprech- und Schreibweisen für $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$: φ wahr unter $\mathfrak{I}$
$\mathfrak{I}$ erfüllt φ
$\mathfrak{I}$ Modell von φ
$\mathfrak{I} \models \varphi$