Kompaktheitssatz (Endlichkeitssatz)

Erfüllbarkeit von unendlichen Formelmengen
hängt nur von je endlich vielen ab, i.d.S.d.:

Für alle $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ gilt:

$$\boxed{\Phi \text{ erfüllbar} \quad \Leftrightarrow \quad \text{jedes endliche } \Phi_0 \subseteq \Phi \text{ erfüllbar}} \quad (*)$$

Für alle $\Phi \subseteq \mathsf{AL}, \psi \in \mathsf{AL}$ gilt:

$$\boxed{\Phi \models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_0 \models \psi \text{ für ein endliches } \Phi_0 \subseteq \Phi} \quad (**)$$

Bem.: Aussagen $(*)$ und $(**)$ sind äquivalent.

Konsequenz:
Unerfüllbarkeit einer unendlichen Formelmenge lässt sich durch ein endliches Zertifikat nachweisen. (Warum?)

Konsequenzen des Kompaktheitssatzes

vgl. auch Skript u. Aufgaben

Lemma von König

Ein endlich verzweigter Baum mit unendlich vielen Knoten muss einen unendlichen Pfad haben.

k-Färbbarkeit

Ein Graph ist genau dann k-färbbar, wenn jeder endliche Teilgraph k-färbbar ist.

Domino-Parkettierungen

Ein endliches Domino-System erlaubt genau dann eine Parkettierung der Ebene, wenn sich beliebig große endliche Quadrate parkettieren lassen.

Beweis des Kompaktheitssatzes

für $\Phi \subseteq \mathsf{AL}(\mathcal{V})$, $\mathcal{V} = \{p_i : i \geqslant 1\}$

Sei jedes endliche $\Phi_0 \subseteq \Phi$ erfüllbar.

Konstruiere induktiv $\mathfrak{I}_0, \mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \ldots$ so, dass:

- $\mathfrak{I}_n$ eine $\mathcal{V}_n$-Interpretation.
- $\mathfrak{I}_{n+1}$ verträglich mit $\mathfrak{I}_n$: $\mathfrak{I}_{n+1}(p_i) = \mathfrak{I}_n(p_i)$ für $1 \leqslant i \leqslant n$.
- alle endlichen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ erfüllbar durch mit $\mathfrak{I}_n$ verträgliche $\mathfrak{I}$.

Dann ist $\mathfrak{I} \models \Phi$ für die Interpretation $\begin{array}{rcl} \mathfrak{I}\colon \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{B} \\ p_n & \longmapsto & \mathfrak{I}_n(p_n) \end{array}$

Wie kommt man von $\mathfrak{I}_n$ zu $\mathfrak{I}_{n+1}$?

Lemma von König aus AL-Kompaktheit

Betrachte $\mathcal{T} = (V, E, \lambda)$ Baum mit

– Wurzel λ und abzählbar unendlicher Knotenmenge V,

– endlich verzweigter Kantenrelation E:
$E[u] = \{v \in V : (u, v) \in E\}$ endlich f.a. $u \in V$.

– Pfaden $\lambda \xrightarrow{E} \ldots \xrightarrow{E} u$ jeder endlichen Länge,
da sonst V endlich.

Lemma von König aus AL-Kompaktheit, fortges.

Kodierung in AL($\mathcal{V}$) mit $\mathcal{V} := \{p_u \colon u \in V\}$:

$$\varphi_u := p_u \to \bigvee\{p_v \colon v \in E[u]\}$$

“wenn u gewählt wird,
dann auch mindestens ein direkter Nachfolger von u”

Für $\Phi := \{p_\lambda\} \cup \{\varphi_u \colon u \in V\}$ gilt:

- jedes endliche $\Phi_0 \subseteq \Phi$ ist erfüllbar, also auch Φ insgesamt.
- wenn $\mathfrak{I} \models \Phi$, so existiert ein unendlicher Pfad $\lambda = u_0 \stackrel{E}{\to} u_1 \stackrel{E}{\to} u_2 \stackrel{E}{\to} \dots$ mit $\mathfrak{I}(u_i) = 1$.

Bem.: mit $\varphi'_u := p_u \to$ “…genau ein direkter Nachfolger von u” beschreibt jedes $\mathfrak{I} \models \Phi'$ *einen* unendlichen Pfad.

Logikkalküle: Deduktion und Refutation

Logikkalküle: rein syntaktische Formate für formale Beweise.

Formale Beweise: syntaktische Zeichenketten,
nach einfach nachprüfbaren syntaktischen Regeln aufgebaut
(Regelsystem: *Kalkül*).

Ableitung: Erzeugung von (regelkonformen) formalen Beweisen.

Korrektheit nur semantisch korrekte Sachverhalte sind formal beweisbar (ableitbar).

Vollständigkeit jeder semantisch korrekte Sachverhalt ist formal beweisbar (ableitbar).

Resolution: ein *Widerlegungskalkül* für die *Unerfüllbarkeit* von KNF-Formeln.

Sequenzenkalkül: ein *Deduktionskalkül* für Allgemeingültigeit beliebiger AL-Formeln.

KNF in Klauselform

KNF: Konjunktionen von Disjunktionen von Literalen.

Notation: L für Literal; $\overline{L}$ für komplementäres Literal; $\overline{L} \equiv \neg L$.

Klausel: endliche Menge von Literalen
$C = \{L_1, \dots, L_k\}$ steht für $\bigvee C \equiv L_1 \vee \dots \vee L_k$
$\Box$ steht für die leere Klausel.
Erinnerung: $\Box \equiv \bigvee \emptyset \equiv 0$.

Klauselmenge: Menge von Klauseln
$K = \{C_1, \dots, C_\ell\}$ steht für $\bigwedge K \equiv C_1 \wedge \dots \wedge C_\ell$
Erinnerung: $\bigwedge \emptyset \equiv 1$.

$$\boxed{\text{endliche Klauselmengen} \;\approx\; \text{KNF-Formeln}}$$

Resolutionskalkül arbeitet mit KNF in Klauselform
Ableitungsziel: Nachweis der Unerfüllbarkeit einer geg. Klauselmenge durch Ableitung der leeren Klausel $\Box$