AL und Boolesche Funktionen

$\mathcal{B}_n$ die Menge aller n-stelligen Booleschen Funktionen

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{B}^n & \longrightarrow & \mathbb{B} \\ (b_1, \dots, b_n) & \longmapsto & f(b_1, \dots, b_n) \end{array}$$

für $\varphi \in \mathrm{AL}_n$: $\left.\begin{array}{rcl} f_\varphi : \mathbb{B}^n & \longrightarrow & \mathbb{B} \\ (b_1, \dots, b_n) & \longmapsto & \varphi[b_1, \dots, b_n] \end{array}\right\} \in \mathcal{B}_n$

---

beachte: $f_\varphi = f_\psi$ gdw. $\varphi \equiv \psi$

also: $\begin{array}{rcl} \mathrm{AL}_n/\!\equiv & \longrightarrow & \mathcal{B}_n \\ [\varphi]_\equiv & \longmapsto & f_\varphi \end{array}$ injektiv!

Fragen:

- wieviele n-stellige Boolesche Funktionen gibt es?; $|\mathcal{B}_n| =$?
- ist jedes $f \in \mathcal{B}_n$ durch AL-Formel $\varphi \in \mathrm{AL}_n$ darstellbar?

Dualität zw. Kunjunktion und Disjunktion

nützliche Umformungen/Rechenregeln

$\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv \neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2$ verallgemeinert zu

$\boxed{\neg\left(\bigwedge \Phi\right) \equiv \bigvee \Phi^\neg}$ wo $\Phi^\neg := \left\{\neg\varphi \colon \varphi \in \Phi\right\}$

$\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$ verallgemeinert zu

$\boxed{\neg\left(\bigvee \Phi\right) \equiv \bigwedge \Phi^\neg}$

für KNF $\longleftrightarrow$ DNF: $\boxed{\neg \underbrace{\bigwedge_{i=1}^{k} \left(\bigvee C_i\right)}_{\text{KNF}} \equiv \underbrace{\bigvee_{i=1}^{k} \left(\bigwedge C_i^\neg\right)}_{\text{DNF}^*}}$

$C_1, \dots, C_k$ (endl.) Mengen von Literalen

* Doppelnegationen in den $C_i^\neg$ eliminieren

Disjunktive und konjunktive Normalformen, DNF, KNF

Nomenklatur: p bzw. $\neg p$ (für $p \in \mathcal{V}$) heißen *Literale*

Disjunktionen von Konjunktionen von Literalen: *DNF-Formeln*
Konjunktionen von Disjunktionen von Literalen: *KNF-Formeln*

Konvention: auch *leere* Disjunktionen/Konjunktionen zulässig
mit der Interpretation: $\bigvee \emptyset \equiv 0$
$\bigwedge \emptyset \equiv 1$

Funktionale Vollständigkeit (von AL_n für $\mathcal{B}_n$)

zu jedem $f \in \mathcal{B}_n$ existiert DNF-Formel $\varphi \in \mathrm{AL}_n$ mit $f = f_\varphi$.

($\longrightarrow$ bijektive Korrespondenz zw. $\mathcal{B}_n$ und $\mathrm{AL}_n/\!\equiv$)

Korollar: Satz über DNF und KNF

zu jedem $\varphi \in \mathrm{AL}_n$ existieren: DNF-Formel $\varphi_1 \in \mathrm{AL}_n$ mit $\varphi_1 \equiv \varphi$,
KNF-Formel $\varphi_2 \in \mathrm{AL}_n$ mit $\varphi_2 \equiv \varphi$.

Beispiel für exponentiellen "blow-up"

$$\varphi_m = \varphi_m(p_1, \dots, p_{2m}) := \bigwedge_{i=1}^{m} \neg(p_{2i-1} \leftrightarrow p_{2i}) \quad \in \mathrm{AL}_{2m}$$

- φ_m hat genau 2^m erfüllende Interpretationen in $\mathbb{B}^{2m}$, und:
- KNF von Länge $\sim m$ (linear in m):
  $\varphi_m \equiv \bigwedge_{i=1}^{m} \big((p_{2i-1} \vee p_{2i}) \wedge (\neg p_{2i-1} \vee \neg p_{2i})\big)$
- DNF in Länge $\sim 2m2^m$ (exponentiell in m):
  $\varphi_m \equiv \bigvee \left\{\varphi_{\mathbf{b}} \colon \mathbf{b} \in \mathbb{B}^{2m}, \varphi_m[\mathbf{b}] = 1\right\}$
- keine kürzere DNF: $\begin{cases} \text{keine kürzeren Disjunktionsglieder!} \\ \text{keine redundanten Disjunktionsglieder!} \end{cases}$

Vollständige Systeme von Junktoren

Für $n \geqslant 1$ ist jede Funktion in $\mathcal{B}_n$ darstellbar durch AL$_n$-Formel, die nur die Junktoren $\neg$ und $\wedge$ (nur $\neg$ und $\vee$) benutzt.

Begr.: Eliminiere $\vee$ oder $\wedge$ mit $\begin{cases} \varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv \neg(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) \\ \varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \neg(\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2) \end{cases}$

Systeme von Junktoren (Booleschen Funktionen) mit dieser Eigenschaft heißen *vollständig*.

auch vollständig z.B.:

- $\mid$ mit der Definition $p \mid q := \neg(p \wedge q)$ (NAND)
  benutze z.B.: $\neg p \equiv p \mid p$; $p \wedge q \equiv \neg(p \mid q) \equiv (p \mid q) \big| (p \mid q)$.
- $\rightarrow$ zusammen mit 0
  benutze z.B.: $\neg p \equiv p \rightarrow 0$; $p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q \equiv (p \rightarrow 0) \rightarrow q$.

nicht vollständig sind z.B.: $\{\wedge, \vee\}$ (Monotonie);
$\{\rightarrow\}$ ($0 \in \mathcal{B}_n$ nicht darstellbar).

Kompaktheitssatz (Endlichkeitssatz)

Erfüllbarkeit von unendlichen Formelmengen hängt nur von je endlich vielen ab, i.d.S.d.:

Für alle $\varPhi \subseteq$ AL gilt:

$$\boxed{\varPhi \text{ erfüllbar} \quad \Leftrightarrow \quad \text{jedes endliche } \varPhi_0 \subseteq \varPhi \text{ erfüllbar}} \quad (*)$$

Für alle $\varPhi \subseteq$ AL, $\psi \in$ AL gilt:

$$\boxed{\varPhi \models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \varPhi_0 \models \psi \text{ für ein endliches } \varPhi_0 \subseteq \varPhi} \quad (**)$$

Bem.: Aussagen $(*)$ und $(**)$ sind äquivalent.

Konsequenz:
Unerfüllbarkeit einer unendlichen Formelmenge lässt sich durch ein endliches Zertifikat nachweisen. (Warum?)

Beweis des Kompaktheitssatzes

für $\varPhi \subseteq$ AL$(\mathcal{V})$, $\mathcal{V} = \{p_i : i \geqslant 1\}$

Sei jedes endliche $\varPhi_0 \subseteq \varPhi$ erfüllbar.

Konstruiere induktiv $\mathfrak{I}_0, \mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \ldots$ so, dass:

- $\mathfrak{I}_n$ eine $\mathcal{V}_n$-Interpretation.
- $\mathfrak{I}_{n+1}$ verträglich mit $\mathfrak{I}_n$: $\mathfrak{I}_{n+1}(p_i) = \mathfrak{I}_n(p_i)$ für $1 \leqslant i \leqslant n$.
- alle endlichen $\varPhi_0 \subseteq \varPhi$ erfüllbar durch mit $\mathfrak{I}_n$ verträgliche $\mathfrak{I}$.

Dann ist $\mathfrak{I} \models \varPhi$ für die Interpretation $\begin{array}{rcl} \mathfrak{I}\colon \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{B} \\ p_n & \longmapsto & \mathfrak{I}_n(p_n) \end{array}$

Wie kommt man von $\mathfrak{I}_n$ zu $\mathfrak{I}_{n+1}$?

Konsequenzen des Kompaktheitssatzes

vgl. auch Skript u. Aufgaben

Lemma von König

Ein endlich verzweigter Baum mit unendlich vielen Knoten muss einen unendlichen Pfad haben.

k-Färbbarkeit

Ein Graph ist genau dann k-färbbar, wenn jeder endliche Teilgraph k-färbbar ist.

Domino-Parkettierungen

Ein endliches Domino-System erlaubt genau dann eine Parkettierung der Ebene, wenn sich beliebig große endliche Quadrate parkettieren lassen.