GI-Resolution: Resolutionssatz

Korrektheit und *Vollständigkeit* von GI-Resolution
für die Unerfüllbarkeit von universell-pränexen FO$^{\neq}(S)$-Satzmengen in Klauselform

Resolutionssatz

Für FO$^{\neq}(S)$-Klauselmengen K sind äquivalent:

(i) K unerfüllbar.

(ii) GI(K) unerfüllbar.

(iii) $\square \in \text{Res}^*(\text{GI}(K))$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: $C \in \text{Res}^*(\text{GI}(K))$ impliziert, dass $K \models C$
$\square \equiv 0$ unerfüllbar.

$(i) \Leftrightarrow (ii)$: Erfüllbarkeitsäquivalenz (Herbrand).

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Vollständigkeit von AL Resolution + Reduktion.

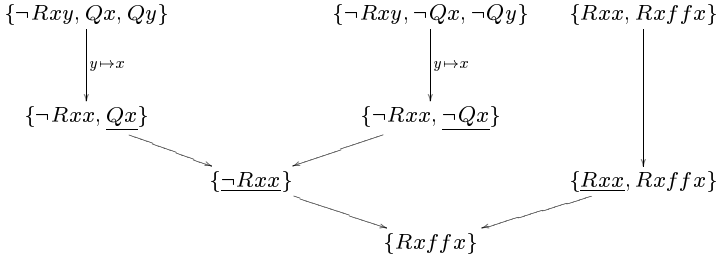
allgemeinere Resolution

Idee: nicht notwendig zu Grundinstanzen absteigen
Resolution nach Substitution von Termen mit Variablen

Substitutionsinstanz zu $\sigma = (t_1, \ldots, t_n) \in T(S)^n$:
$C^\sigma = \{\lambda^\sigma \colon \lambda \in C\} = \{\lambda(t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n) \colon \lambda \in C\}$

Resolution von C_1 und C_2 zu C falls für geeignete σ_1 und σ_2:
$\lambda \in C_1^{\sigma_1}, \overline{\lambda} \in C_2^{\sigma_2}, C = (C_1^{\sigma_1} \setminus \{\lambda\}) \cup (C_2^{\sigma_2} \setminus \{\overline{\lambda}\})$

Bsp.:



$\forall x \forall y \big(\neg Rxy \vee Qx \vee Qy\big), \forall x \forall y \big(\neg Rxy \vee \neg Qx \vee \neg Qy\big), \forall x \big(Rxx \vee Rxffx\big) \models \forall x Rxffx$

Sequenzenkalküle — vgl. AL Sequenzenkalkül

Allgemeingültigkeitsbeweise (für bel. FO-Formeln/Sätze)

Gegenstand: FO-*Sequenzen* $\Gamma \vdash \Delta$
für endliche $\Gamma, \Delta \subseteq \text{FO}_0(S)$

$\Gamma \vdash \Delta$ *allgemeingültig* wenn $\bigwedge \Gamma \models \bigvee \Delta$

Beweisziel: Ableitung allgemeingültiger Sequenzen

Korrektheit: jede ableitbare Sequenz ist allgemeingültig.

Vollständigkeit: jede allgemeingültige Sequenz ist ableitbar.
(schwache Form, wird später verschärft)

Ableitungsschritte: Anwendung von *Regeln*
(zur Erzeugung von Sequenzen)

Sequenzenkalkül: Regeln und Korrektheit

Format von *Sequenzenregeln* (wie in AL): $\dfrac{\text{Prämissen}}{\text{Konklusion}}$

Konklusionen von Regeln ohne Prämisssen: *Axiome*

ableitbare Sequenzen:
ausgehend von Axiomen (in endlich vielen Schritten) durch Anwendung von Sequenzenregeln erzeugte Sequenzen

Korrektheit: jede ableitbare Sequenz ist allgemeingültig.

folgt aus der Korrektheit der einzelnen Regeln:

- die Axiome sind allgemeingültige Sequenzen.
- für Regeln mit Prämissen:
  Prämissen allgemeingültig $\Rightarrow$ Konklusion allgemeingültig.

Sequenzenkalkül: Regeln

FO Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$, drei Gruppen von Regeln:

- *AL Regeln* (analog zum AL-Sequenzenkalkül).
- *Quantorenregeln*: Einführung von $\forall$ oder $\exists$ links/rechts.
  ($\forall$L), ($\forall$R), ($\exists$L), ($\exists$R).
- *Gleichheitsregeln*: Umgang mit Term-Gleichheiten.
  (=), (Sub-L), (Sub-R).

AL + Quantorenregeln: vollständiger Beweiskalkül $\mathcal{SK}^{\neq}$ für FO$^{\neq}$.

$\mathcal{SK}^{\neq}$ + Gleichheitsregeln: vollständiger Beweiskalkül $\mathcal{SK}$ für FO.

Zusätzlich (nicht notwendig aber natürlich) in $\mathcal{SK}^{+}$:

- *Schnittregeln*: Kettenschlüsse und Beweise durch Widerspruch.

Sequenzenkalkül: Gleichheitsregeln

(=) $\dfrac{\Gamma, t = t \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$

(Sub-L) $\dfrac{\Gamma, \varphi(t/x) \vdash \Delta}{\Gamma, t = t', \varphi(t'/x) \vdash \Delta}$ (Sub-R) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(t/x)}{\Gamma, t = t' \vdash \Delta, \varphi(t'/x)}$

und analoge Regeln mit $t' = t$ statt $t = t'$

Korrektheit prüfen!

Sequenzenkalkül: Quantorenregeln

($\forall$L) $\dfrac{\Gamma, \varphi(t/x) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi(x) \vdash \Delta}$ ($\forall$R) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(c/x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi(x)}$

falls c nicht in $\Gamma, \Delta, \varphi(x)$

($\exists$L) $\dfrac{\Gamma, \varphi(c/x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi(x) \vdash \Delta}$ ($\exists$R) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(t/x)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi(x)}$

falls c nicht in $\Gamma, \Delta, \varphi(x)$

Korrektheit prüfen!

Sequenzenkalkül: Schnittregeln (optional)

(modus ponens) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma' \vdash \varphi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}$

(Kontradiktion) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma' \vdash \neg\varphi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \emptyset}$

Korrektheit prüfen!

Bem.: Kontradiktionsregel (lokal) mit modus ponens simulierbar

beide Regeln lassen sich (nicht lokal) eliminieren

(vgl. AL-Sequenzenkalkül)

unterscheide *schnittfreie* Kalküle wie $\mathcal{SK}$
von solchen mit Schnittregeln wir $\mathcal{SK}^{+}$

Ziel: Vollständigkeit

Ableitbarkeit aus Theorie $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0$:

φ ableitbar aus Φ $[\Phi \vdash \varphi]$ gdw.

für geeignetes $\Gamma_0 \subseteq \Phi$ (Voraussetzungen) ist $\Gamma_0 \vdash \varphi$ ableitbar.

Φ konsistent (widerspruchsfrei) gdw. *nicht* $\Phi \vdash \emptyset$.

Vollständigkeit (starke Form) **Korrektheit**

$\Phi \models \varphi \Rightarrow \Phi \vdash \varphi$	$\Phi \vdash \varphi \Rightarrow \Phi \models \varphi$
Φ konsistent $\Rightarrow$ Φ erfüllbar	Φ erfüllbar $\Rightarrow$ Φ konsistent

alles, was wahr ist, ist ableitbar

alles, was ableitbar ist, ist wahr

Gödelscher Vollständigkeitssatz

(Vollständigkeit & Korrektheit des Sequenzenkalküls)

Für jede Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0(S)$
und jeden Satz $\varphi \in \mathrm{FO}_0(S)$ gelten:

- $\Phi \models \varphi$ gdw. $\Phi \vdash \varphi$.
- Φ erfüllbar gdw. Φ konsistent.

Zentrale Folgerungen

Kompaktheitssatz

(wesentlich neuer Zugang)

Allgemeingültigkeit rekursiv aufzählbar

(später: nicht entscheidbar)

Vollständigkeitsbeweise

zu zeigen: Konsistenz $\Rightarrow$ Erfüllbarkeit

nicht-Ableitbarkeit / best. Sequenzen $\Rightarrow$ Existenz eines Modells

dazu

Ableitbarkeit von Sequenzen aus einer Satzmenge

Ableitbarkeit unter gegebenen Vorraussetzungen

$\Gamma \vdash \Delta$ *ableitbar aus* Φ gdw. für geeignetes $\Gamma_0 \subseteq \Phi$
$\Gamma_0, \Gamma \vdash \Delta$ ableitbar ist.

Vollständigkeitsbeweise (Grundideen)

Hintikka-Konstruktion (Vollständigkeit von $\mathcal{SK}^{\neq}$ bzw. $\mathcal{SK}$)

zeige: $\Gamma \vdash \Delta$ *nicht* ableitbar aus $\Phi \Rightarrow \Phi \cup \Gamma \cup \Delta^{\neg}$ erfüllbar

Man findet Modell einer induktiv geeignet gewählten Obermenge von $\Phi \cup \Gamma \cup \Delta^{\neg}$ ($\rightarrow$ Hintikka-Menge).

Henkin-Konstruktion (Vollständigkeit von $\mathcal{SK}^{+}$, einfacher)

zeige: Φ *konsistent* $\Rightarrow$ Φ erfüllbar

Man findet Modell einer induktiv geeignet gewählten vollständigen Obermenge von Φ ($\rightarrow$ Henkin-Menge).

in beiden Fällen: Modelle (als Quotient) einer Herbrand-Struktur