Übungsblatt 13 zur Vorlesung Darstellungstheorie

Prof. Dr. J. Bruinier

Markus Schupp

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2008/2009

09.02.2009

Aufgabe 1

Sei G eine kompakte Gruppe und π eine stetige Darstellung von G im Hilbertraum $\left(\mathscr{H}, \langle\cdot\rangle'\right)$. Zeigen Sie, dass

$$\langle u, v\rangle = \int_G \left\langle \pi(g)u, \pi(g)v\right\rangle' dg$$

ein invariantes Skalarprodukt auf $\mathscr{H}$ ist.

Aufgabe 2

Sei G eine kompakte Gruppe und π eine stetige Darstellung auf dem Hilbertraum $\left(\mathscr{H}, \langle\cdot\rangle'\right)$. Zeigen Sie, dass

$$\sup_{g\in G} \|\pi(g)\|'$$

endlich ist.

Aufgabe 3

Sei G eine unimodulare lokalkompakte Gruppe mit Haar-Maß dg. Zeigen Sie, dass für jede integrierbare Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_G f(g)dg = \int_G f(g^{-1})dg.$$

Aufgabe 4

Sei $(e_i)_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum $\mathscr{H}$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathscr{H}$ gilt:

$$\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$