Übungsblatt 12 zur Vorlesung Darstellungstheorie

Prof. Dr. J. Bruinier
Markus Schupp

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2008/2009
03.02.2009

Aufgabe 1

Sei G eine lokalkompakte topologische Gruppe mit abzählbarer Basis der Topologie. Sei weiterhin μ_l ein linkes Haar-Maß mit Modularfunktion Δ.

a) Zeigen Sie, dass ein rechtes Haar-Maß μ_r existiert, so dass gilt

$$(g\mu_r)(B) = \Delta(g)^{-1}\mu_r(B).$$

b) Sei nun μ_r ein beliebiges rechtes Haar-Maß. Zeigen Sie, dass für eine geeignete Konstante $C \in \mathbb{R}_{>0}$ die folgende Gleichung gilt:

$$\int_G f(g)d\mu_r(g) = C\int_G f(g)\Delta(g^{-1})d\mu_l(g)$$

Aufgabe 2

Sei $G = \mathrm{Heis}(\mathbb{R})$ die Heisenberggruppe (siehe Übungsblatt 1 und 2). Zur Erinnerung: Diese besteht aus Tripeln $g = (\lambda, \mu, \kappa) \in \mathbb{R}^3$ mit der Multiplikation

$$gg' = \left(\lambda + \lambda', \mu + \mu', \kappa + \kappa' + \lambda\mu' - \mu\lambda'\right).$$

Zeigen Sie, dass folgendermaßen ein (linkes) Haar-Maß definiert wird:

$$dg := d\lambda d\mu d\kappa$$

Die Maße auf der rechten Seite stehen jeweils für das Lesbesgue-Maß.

Aufgabe 3

Sei $G = \mathrm{SU}(2)$. Wir setzen

$$s(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \qquad r(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass sich jedes $g \in \mathrm{SU}(2)$ folgendermaßen zerlegen lässt:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} = s\left(-\frac{\alpha}{2}\right) r\left(-\frac{\beta}{2}\right) s\left(-\frac{\gamma}{2}\right) \qquad \text{für } \alpha, \gamma \in [0, 2\pi] \text{ und } \beta \in [0, \pi]$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass ein Haar-Maß auf der Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ auf folgende Weise definiert ist:

$$d\mu(X) = \det(X)^{-n}dX$$

Hierbei bezeichnet dX das Lesbesgue-Maß auf $\mathbb{R}^{n\times n}$.