Übungsblatt 11 zur Vorlesung Darstellungstheorie

Prof. Dr. J. Bruinier
Markus Schupp

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2008/2009
26.01.2009

Aufgabe 1

Sei H ein Hilbertraum und seien $H_1, H_2 \subset H$ abgeschlossene Unterräume. Sei weiterhin $H_1 \cap H_2 = \{0\}$.

a) Zeigen Sie, dass $H_1 \oplus H_2 \subset H$ abgeschlossen ist, falls die Summe orthogonal ist.

b) Geben Sie ein Beispiel der obigen Situation an, in der $H_1 \oplus H_2 \subset H$ nicht abgeschlossen ist.

Aufgabe 2

Sei (π, H) eine stetige Darstellung der topologischen Gruppe G. Sei $0 \neq v \in H$ und sei H_v der Abschluss von

$$\mathrm{Lin}\left\{\pi(g)v \mid g \in G\right\}.$$

Zeigen Sie, dass H_v ein G-invarianter Unterraum ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass eine unitäre Darstellung (π, H) genau dann irreduzibel ist, wenn jeder Vektor $0 \neq v \in H$ zyklisch ist.

Aufgabe 4

Sei X ein lokalkompakter Hausdorff Raum mit abzählbarer Basis der Topologie. Sei μ ein Borelmaß auf X.

a) Zeigen Sie, dass μ auf offenen Mengen von innen regulär ist.

b) Zeigen Sie, dass μ auf kompakten Mengen von außen regulär ist.

Die Ergebnisse dieser Aufgabe kann man verwenden, um zu zeigen, dass μ ein reguläres Maß ist. Dazu verwendet man den Regularitätssatz (für endliche Borelmaße). Ein detailierter Beweis ist in Kapitel 8.1 des Buches J. Elstrodt, Maß- und Integrationstheorie zu finden.