Übungsblatt 9 zur Vorlesung Darstellungstheorie

Prof. Dr. J. Bruinier
Markus Schupp

Wintersemester 2008/2009
12.01.2009

Aufgabe 1 Bestimmung von Darstellungen

a) Bestimmen Sie die irreduziblen Darstellungen der zyklischen Gruppe C_n.

b) Bestimmen Sie die irreduziblen Darstellungen der Diedergruppe D_n.

Erinnerung: Die Diedergruppe D_n ist die Symmetriegruppe eines regulären n-Ecks. Sie wird von einer Spiegelung s und einer Drehung r erzeugt. Diese erfüllen die Relationen $r^n = e$, $s^2 = e$ und $srs = r^{-1}$.

Aufgabe 2 Zusammenhängende topologische Gruppen.

Definition 1. Eine topologische Gruppe heißt *(weg-)zusammenhängend*, wenn für beliebige $a, b \in G$ eine stetige Abbildung $\phi : [0,1] \to G$ existiert, so dass $\phi(0) = a$ und $\phi(1) = b$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ nicht zusammenhängend ist.

b) Zeigen Sie, dass die topologischen Gruppen $\mathrm{SU}(2)$ und $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ zusammenhängend sind.

Aufgabe 3 Stetigkeit linearer Abbildungen

Definition 2. Seien E, F Banachräume. Eine lineare Abbildung $T : E \to F$ heißt auch linearer Operator. Ein linearer Operator heißt *beschränkt*, falls es ein $C > 0$ gibt, mit

$$\|Tx\| \leq C\|x\| \qquad \text{für alle } x \in E.$$

Zeigen Sie, dass ein linearer Operator T genau dann stetig ist, wenn er beschränkt ist.

Definition 3. Sei T ein beschränkter Operator. Dann heißt

$$\|T\| = \inf\{C > 0 \mid \|Tx\| \leq C\|x\|\}$$

Operatornorm von T.

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gelten:

- $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\|$.
- Für alle $x \in E$ gilt $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$.

Aufgabe 4 Topologische Gruppen

Sei G eine topologische Gruppe.

a) Zeigen Sie, dass die Topologie auf G vollständig durch ein System von offenen Umgebungen des Neutralelements e bestimmt ist.

b) Sei H eine normale Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass der Abschluss von H normal ist.

c) Sei H eine abelsche Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass der Abschluss von H abelsch ist.