Übungsblatt 8 zur Vorlesung Darstellungstheorie

Prof. Dr. J. Bruinier
Markus Schupp

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2008/2009
15.12.2008

Aufgabe 1

Seien (π, V) und (π', V') endlichdimensionale, irreduzible Darstellungen der endlichen Gruppe G. Sei $L_0 : V \to V'$ eine lineare Abbildung zwischen den beiden Vektorräumen. Wir definieren die Abbildung $L : V \to V'$, durch

$$L(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi'(g^{-1}) L_0(\pi(g)v)$$

Zeigen Sie, dass entweder $L = 0$ gilt, oder dass $L = \frac{\mathrm{tr}(L_0)}{\dim(V)} \cdot \mathrm{id}$ ist.

Aufgabe 2 Darstellungsring

Definition 1. Sei G eine Gruppe und A die freie abelsche Gruppe, die von den Isomorphieklassen von Darstellungen von G erzeugt wird. Sei weiter N die Untergruppe von A, die von allen Elementen der Form $\pi + \pi' - (\pi \oplus \pi')$ erzeugt wird. Wir betrachten nun die Faktorgruppe $R(G) = {}^{A}\!/_{N}$.
Um eine Ringstruktur auf $R(G)$ zu erhalten, definieren wir folgende Multiplikation:
Auf den Erzeugern von $R(G)$ verwendet man das Tensorprodukt. Dies wird bilinear fortgesetzt.

a) Zeigen Sie, dass $R(G)$ alternativ folgendermaßen beschrieben werden kann:

   Definition 2. Sei G eine Gruppe. Definiere $R(G)$ als die Menge der ganzzahligen Linearkombinationen von Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen von G.

   $$R(G) = \left\{ \sum a_i \pi_i \mid a_i \in \mathbb{Z}, \pi_i \text{ irreduzible Darstellung von } G \right\}$$

   Das Produkt zweier Elemente definiert man als ihr Tensorprodukt, das man anschließend in irreduzible Darstellungen zerlegt.

Für die folgenden Teilaufgaben definieren wir folgende Abbildung.

$$\chi : \begin{array}{ccc} R(G) & \to & \mathbb{C}[G] \\ \sum a_i \pi_i & \mapsto & \sum a_i \chi_{\pi_i} \end{array}$$

b) Zeigen Sie, dass χ einen Ringhomomorphismus definiert.

c) Zeigen Sie, dass χ injektiv ist.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass die Abbildung χ einen Isomorphismus induziert:

$$\chi_{\mathbb{C}} : R(G) \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}_{class}(G)$$

Aufgabe 3 Charaktertafel von S_4

Bestimmen Sie die Charaktertafel der Gruppe S_4.
Hinweis: Sie können verwenden, dass die Anzahl der Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen von G gleich der Anzahl der Konjukationsklassen von G ist.

Aufgabe 4 Irreduzible Darstellungen von S_4

In dieser Aufgabe konstruieren wir die in Aufgabe Aufgabe 3 nicht bekannte zweidimensionale irreduzible Darstellung von S_4.

a) Zeigen Sie, dass $N = \{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ eine normale Untergruppe in S_4 ist.

b) Zeigen Sie, dass ${}^{S_4}\!/_{N} \cong S_3$. Benutzen Sie dies, um eine zweidimensionale irreduzible Darstellung von S_4 zu konstruieren.