Übungsblatt 5 zur Vorlesung Darstellungstheorie

Prof. Dr. J. Bruinier
Markus Schupp

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2008/2009
17.11.2008

Aufgabe 1: Koeffizientenerweiterung

Sei $K \subset K'$ eine Körpererweiterung und sei V ein K - Vektorraum mit $\dim V = n$. Zeigen Sie, dass $V \otimes K'$ ein K' - Vektorraum der Dimension n ist.

Aufgabe 2: Vollständig reduzible Darstellungen

Sei (π, V) eine vollständig reduzible Darstellung und sei (π_1, V_1) eine Unterdarstellung. Zeigen Sie, dass auch (π_1, V_1) vollständig reduzibel ist.

Aufgabe 3: Permutationsdarstellung und Reguläre Darstellung (wird korrigiert)

Definition 1. Sei G eine Gruppe, die auf einer endlichen Menge X operiert. Sei V ein Vektorraum mit Basis $\{e_x \mid x \in X\}$. Wir definieren die *Permutationsdarstellung* π durch

$$\pi(g)\left(\sum_{x\in X} a_x e_x\right) = \sum_{x\in X} a_x e_{gx}$$

Definition 2. Sei R der Vektorraum der komplexwertigen Funktionen auf G. Wir definieren die *reguläre Darstellung* ρ durch

$$(\rho(g)F)(h) = F(g^{-1}h)$$

a) Wir betrachten die Permutationsdarstellung der endlichen Gruppe G, die auf sich selbst wirkt ($X = G$). Zeigen Sie, dass diese Darstellung mit der regulären Darstellung von G übereinstimmt.

   Hinweis: Identifizieren Sie ein Basiselement e_x mit der charakteristischen Funktion χ_x:

$$\chi_x(h) : \begin{cases} 1 & \text{für} \quad h = x \\ 0 & \text{für} \quad h \neq x \end{cases}$$

b) Alternativ kann man in Definition 2 folgende Regel einführen:

$$(\rho'(g)F)(h) = F(hg)$$

   Zeigen Sie, dass ρ und ρ' isomorph sind.

Aufgabe 4: Darstellung der Gruppe S_3 (wird korrigiert)

Sei (π, V) eine irreduzible Darstellung von S_3. Zeigen Sie, dass (π, V) äquivalent zu einer der folgenden Darstellungen ist:

- zur trivialen Darstellung.
- zur alternierenden Darstellung.
- zur zweidimensionalen irreduziblen Darstellung aus der Vorlesung.

Hinweis: Betrachten Sie $\tau = (1\ 2\ 3) \in S_3$ und $\sigma = (1\ 2) \in S_3$ und schränken Sie π auf die alternierenden Gruppe $A_3 = \langle \tau \rangle \subset S_3$ ein. Benutzen Sie, dass A_3 abelsch ist.