Übungsblatt 4 zur Vorlesung Darstellungstheorie

Prof. Dr. J. Bruinier

Markus Schupp

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2008/2009

10.11.2008

Aufgabe 1: Unterdarstellung des Tensorproduktes von Darstellungen

Sei (π, V) eine Darstellung. Zeigen Sie, dass $(\pi^{\otimes n}, V^{\otimes n})$ eine Unterdarstellung besitzt, die zu $\mathsf{Sym}^n\,\pi$ isomorph ist.

Hinweis: Betrachten Sie den Vektorraum $V_1 = \left\{ \sum_{\sigma \in S_n} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} \;\middle|\; v_1 \ldots v_n \in V \right\}$.

Aufgabe 2: Dimensionsformeln

Sei V ein k - dimensionaler Vektorraum. Verallgemeinern Sie die Aussagen über die Dimensionen von Tensorprodukt, symmetrischer Potenz und alternierender Potenz aus der Vorlesung. Weisen Sie dazu folgende Formeln nach:

- $\dim(V^{\otimes n}) = k^n$
- $\dim(\mathsf{Sym}^n\, V) = \binom{k+n-1}{n}$
- $\dim(\Lambda^n V) = \binom{k}{n}$

Aufgabe 3: Dualraum von symmetrischen und alternierenden Potenzen (wird korrigiert)

a) Zeigen Sie, dass $\mathsf{Sym}^2(V)^*$ isomorph zum $\mathbb{K}$ - Vektorraum $\mathsf{SymBil}(V \times V, \mathbb{K})$ der symmetrischen Bilinearformen von $V \times V$ nach $\mathbb{K}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $\Lambda^2(V)^*$ isomorph zum $\mathbb{K}$ - Vektorraum $\mathsf{AltBil}(V \times V, \mathbb{K})$ der alternierenden Bilinearformen von $V \times V$ nach $\mathbb{K}$ ist.

c) Folgern Sie, dass die Determinante eines Vektorraums der Dimension 2 eindeutig bestimmt ist. Wie lässt sich dies auf Vektorräume der Dimension n verallgemeinern?

(*Hinweis:* Verwenden Sie Aufgabe 2:.)

Aufgabe 4: Beispiel der symmetrischen Potenz einer Darstellung (wird korrigiert)

Sei (π, V) die Standard- Darstellung von $G = GL_2(\mathbb{C})$ auf $V = \mathbb{C}^2$. Beschreiben Sie die Darstellung $\mathsf{Sym}^m\,\pi$ explizit als Darstellung auf dem Raum $\mathbb{C}[X, Y]_m$ der homogenen Polynome vom Grad m.