Übungsblatt 3 zur Vorlesung Darstellungstheorie

Prof. Dr. J. Bruinier

Markus Schupp

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2008/2009

03.11.2008

Aufgabe 1: Eigenschaften des Tensorprodukts (wird korrigiert)

Seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume und sei $(V \bigotimes_{\mathbb{K}} W, \alpha)$ das Tensorprodukt von V und W.

a) Zeigen Sie, dass α im allgemeinen nicht surjektiv ist.

b) Sei $v \in V$. Wir definieren die lineare Abbildung

$$f_v : \begin{array}{ccc} W & \to & V \bigotimes_{\mathbb{K}} W \\ w & \mapsto & v \otimes w = \alpha(v, w) \end{array}$$

Bestimmen Sie den Kern von f_v und folgern Sie, dass α nicht injektiv ist.

Aufgabe 2: Dualraum des Tensorprodukts

Zeigen Sie, dass $(V \bigotimes_{\mathbb{K}} W)^*$ in natürlicher Weise isomorph ist zum $\mathbb{K}$- Vektorraum $\mathsf{Bil}(V \times W, \mathbb{K})$ der $\mathbb{K}$- bilinearen Abbildungen von $V \times W$ nach $\mathbb{K}$. Geben Sie einen Isomorphismus an.

Aufgabe 3: Eine weiteres Beispiel einer Darstellung (wird korrigiert)

Sei X eine G Menge, mit Linksoperation $x \mapsto gx$. Sei weiterhin $V = \mathfrak{F}(X)$ der Vektorraum der komplexwertigen Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$. Für $f \in V$ definieren wir f_g durch

$$f_g(x) = f(g^{-1}x).$$

Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung λ eine Darstellung von G in V definiert:

$$\lambda(g)(f) := f_g.$$

Aufgabe 4: universelle Eigenschaften

In der Vorlesung haben wir das Tensorprodukt von Vektorräumen durch eine universelle Eigenschaft definiert. Geben Sie die universellen Eigenschaften von folgenden Strukturen an:

a) Die direkte Summe von Vektorräumen.

b) Das direkte Produkt von Vektorräumen.