Übungsblatt 2 zur Vorlesung Darstellungstheorie

Prof. Dr. J. Bruinier
Markus Schupp

Wintersemester 2008/2009
20.10.2008

Aufgabe 1: Darstellung der Heisenberggruppe

Sei $G = \mathrm{Heis}(\mathbb{R})$ die Heisenberggruppe (siehe letztes Übungsblatt). Zur Erinnerung: Diese besteht aus Tripeln $g = (\lambda, \mu, \kappa) \in \mathbb{R}^3$ mit der Multiplikation

$$gg' = (\lambda + \lambda', \mu + \mu', \kappa + \kappa' + \lambda\mu' - \mu\lambda')$$

Sei $V = L^2(\mathbb{R})$ der Raum der auf $\mathbb{R}$ quadratisch Lebesgue integrierbaren Funktionen f. Ein Skalarprodukt ist durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x) dx$$

gegeben. Zeigen Sie, dass für jedes $m \in \mathbb{R}^*$ durch die Abblidung

$$\pi_m(g) f(x) := e^{2\pi i m(\kappa + (\lambda + 2x)\mu)} f(x + \lambda)$$

eine unitäre Darstellung von $\mathrm{Heis}(\mathbb{R})$ definiert wird.

Später werden wir sehen, dass diese Darstellung auch irreduzibel ist. Sie wird *Schröderinger Darstellung* genannt.

Aufgabe 2: Direkte Summe von Darstellungen (wird korrigiert)

Seien (π, V) und (π', V') Darstellungen von G.

a) Zeigen Sie, dass

$$\pi \oplus \pi' : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathrm{Aut}(V \bigoplus V') \\ \pi \oplus \pi'(g) & \mapsto & \pi(g)\,\mathrm{id}_V \oplus \pi'(g)\,\mathrm{id}_{V'} \end{array}$$

eine Darstellung von G definiert.

b) Seien V, V' endlichdimenionale Vektorräume. Beschreiben Sie die Matrixdarstellung von $\pi \oplus \pi'$.

Aufgabe 3: Darstellung abelscher Gruppen (wird korrigiert)

Sei G eine abelsche Gruppe und (π, V) eine endlichdimenionale unitäre Darstellung.
Zeigen Sie, dass π äquivalent zu einer direkten Summe von (irreduziblen) eindimensionalen Darstellungen ist.

Aufgabe 4: Darstellung der Gruppe S_3

In der Vorlesung haben wir die Permutationsdarstellung der Gruppe S_3 betrachtet. Diese haben wir auf den Vektorraum V_3 der Dimension zwei eingeschränkt.
Sei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Zeigen Sie, dass $a := e_1\zeta + e_2 + e_3\zeta^2$ und $b := e_1 + e_2\zeta + e_3\zeta^2$ eine Basis von V_3 ist. Bestimmen Sie die Matrizen von $\pi_3 = \pi_0|_{V_3}$ bezüglich dieser Basis und zeigen Sie, dass π_3 irreduzibel ist.