Übungsblatt 1 zur Vorlesung Darstellungstheorie

Prof. Dr. J. Bruinier
Markus Schupp
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2008/2009
20.10.2008

Aufgabe 1: Homogene Räume (wird korrigiert)

Definition Eine Menge X wird als *homogener Raum* bezeichnet, wenn es eine Gruppe G gibt, die transitiv auf X operiert.

Zeige, dass in einem homogenen Raum folgende Eigenschaften gelten:

a) Für alle $x \in X$ gilt $X = Gx$.

b) Die Stabilisatoren G_x sind zueinander konjugiert.

Aufgabe 2: Gruppenwirkungen und Klassengleichung

a) Sei G eine endliche Gruppe, die auf einer endlichen Menge X operiert. Weiterhin sei X die disjunkte Vereinigung der Orbits $Gx_1, \dots, Gx_k$, also $X = \dot{\bigcup}_{i=1}^{k} Gx_i$. Zeige, dass $|X| = \sum_{i=1}^{k} \frac{|G|}{|G_{x_i}|}$. Wie kann man eine ähnlich Gleichung aufstellen, wenn $|G|$ unendlich ist?

b) Sei G eine Gruppe der Ordnung p^n (wobei p Primzahl und $n \in \mathbb{N}$), die auf einer endlichen Menge X operiert. Sei $X_0 := \{x \in X;\ \ gx = x \text{ für alle } g \in G\}$. Zeige $|X| \equiv \left|X_0\right| mod p$.

Aufgabe 3: Wiederholung Permutationsgruppen (wird korrigiert)

In dieser Aufgabe betrachten wir die symmetrische Gruppe S_n.

a) Zeige, dass sich jede Permutation eindeutig als Produkt von disjunkten Zykeln schreiben lässt.

b) Die Anzahl der Konjugiertenklassen von S_n entspricht der Anzahl der Partitionen von n. (Eine Partition von n ist ein Tupel von natürlichen Zahlen $(n_1, \dots, n_r)$ mit $n_i \geq n_j$ für $i < j$ und $\sum n_i = n$.)

Aufgabe 4: Die Heisenberggruppe

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit der Heisenberggruppe.

Definition Sei K ein Körper. Dann heißt Menge $Heis(K) := \{g = (x, y, z);\ x, y \in K^n, z \in K\}$ zusammen mit der Gruppenoperation $gg' = \left(x + x', y + y', z + z' + x^t y' - y^t x'\right)$ *Heisenberg Gruppe.*

Zeige, dass diese Gruppe für $n = 1$ isomorph zu folgenden Matrizengruppen ist:

- $Heis'(K) := \left\{ g = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \ x, y, z \in K \right\}$

- $Heis''(K) := \left\{ g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mu \\ \lambda & 1 & \mu & \kappa \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \ \mu, \lambda, \kappa \in K \right\}$