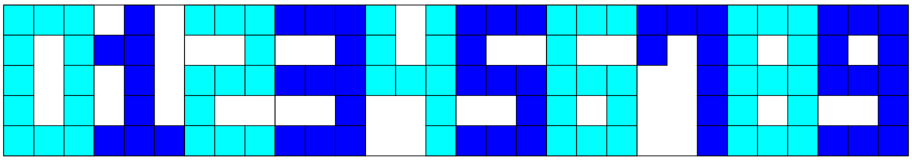
13. Übungsblatt

GRUPPENÜBUNGEN

G35 Wir betrachten die digitale Darstellung der Ziffern 0-9 auf einem 5×3-Raster, wie sie in der Abbildung gezeigt wird.



In der abgebildeten Startkonfiguration berührt die Null mit zwei ihrer Quadrate die Eins. Die Eins berührt mit drei ihrer Quadrate die Quadrate ihrer Nachbarn (mit zweien die Null und mit einem die Zwei), und so weiter. Die Neun berührt schließlich mit vier Quadraten ihren Nachbarn (die Acht).

Multipliziert man nun in einer vorliegenden Konfiguration jede Zahl mit der Anzahl der berührenden Quadrate und summiert alles auf, so erhält man für diese Konfiguration den „Score". In unserem Falle ist dies

$$0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 9 + 9 \cdot 4 = 277.$$

Finden Sie ein IP-Modell, dessen Optimallösung eine Umsortierung der Ziffern mit maximalem bzw. minimalem Score liefert.

G36 Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c_e \in \mathbb{R}_+$ für alle $e \in E$.

Wir betrachten Netzwerkentwurfsprobleme der Form

$$(*) \quad \begin{array}{lll} \min & \sum_{e \in E} c_e x_e & \\ \text{s. t.} & \sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq f(S) & \forall S \subseteq V, \\ & x_e \in \{0, 1\} & \forall e \in E \end{array}$$

(vgl. (5.12) im Skript), wobei $f : 2^V \to \{0, 1\}$ eine **echte** Funktion ist.

a) Wir betrachten das Steinerbaum-Problem (Beispiel 5.22 im Skript):
Gegeben sei eine Teilmenge der Knoten $T \subseteq V$ (**Terminalmenge** genannt). Finde eine bzgl. c gewichtsminimale Kantenmenge $A \subseteq E$, welche T aufspannt, d. h. eine eine Kantenmenge A, so dass alle Paare $s, t \in T$ durch einen Weg in (V, A) verbunden sind.
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : 2^V \to \{0, 1\}$ mit

$$f(S) = \begin{cases} 1, & \text{falls } S \cap T \neq \emptyset \text{ und } (V \backslash S) \cap T \neq \emptyset \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

echt und damit $(*)$ eine korrekte Modellierung des Steinerbaum-Problems ist.

b) Wir betrachten das T-Join-Problem (Beispiel 5.23 im Skript):
Gegeben sei eine Teilmenge der Knoten $T \subseteq V$ mit $|T|$ gerade. Finde eine bzgl. c gewichtsminimale Kantenmenge $A \subseteq E$, so dass jeder Knoten in T ungeraden Grad und jeder Knoten nicht in T geraden Grad hat.
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : 2^V \to \{0, 1\}$ mit

$$f(S) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |S \cap T| \text{ ungerade} \\ 0, & \text{falls } |S \cap T| \text{ gerade} \end{cases}$$

echt und damit $(*)$ eine korrekte Modellierung des T-Join-Problems ist.