Diskrete Optimierung II
SS 2006

Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Agnes Dittel
12. Juli 2006

12. Übungsblatt

Gruppenübungen

G33 Wir betrachten das 0/1-Knapsack-Problem:

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{s. t.} & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\ & x_i \in \{0,1\} \quad (i = 1, ..., n) \end{array}$$

mit $a_i, b, c_i \geq 0$, sowie o.B.d.A. $\frac{c_1}{a_1} \geq ... \geq \frac{c_n}{a_n}$ und $\sum_{i=1}^{n} a_i > b$.

Entwickeln Sie einen polynomialen $\frac{1}{2}$-Approximationsalgorithmus für das 0/1-Knapsack-Problem.

Hinweis: Betrachten Sie eine Optimallösung der LP-Relaxierung (vgl. Aufgabe H20 aus Optimierung I).

G34 a) Wir betrachten das Problem Stable Set:

Gegeben sei ein Graph G und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$. Enthält G eine stabile Menge, welche aus k Knoten besteht?

Zeigen Sie, dass Stable Set $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

Hinweis: Geben Sie eine polynomielle Transformation des Problems Sat (Definition 2.9 aus dem Skript) auf Stable Set an.

Zur Erinnerung: Eine **stabile Menge** in einem Graphen G ist eine Menge von paarweise nicht-adjazenten Knoten.

b) Nun betrachten wir das Problem Vertex Cover:

Gegeben sei ein Graph G und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$. Enthält G eine Knotenüberdeckung (Vertex Cover) der Kardinalität k?

Zeigen Sie, dass Vertex Cover $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

Zur Erinnerung: Ein **vertex cover** in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Menge $S \subseteq V$, so dass jede Kante von G mit mindestens einem Knoten in S inzident ist.

c) Zur Ermittlung eines Vertex Cover in einem Graphen $G = (V, E)$ betrachten wir folgenden Greedy-Algorithmus:

Input: $G = (V, E)$
Output: Ein Vertex Cover $R \subseteq V$

(1) $R := \emptyset$
(2) **Solange** $E \neq \emptyset$
Wähle einen Knoten $v \in V \backslash R$ mit maximalem Grad.
$R := R \cup \{v\}$.
$E := E \backslash \{e \in E \mid \exists w \in V : \ e = \{v, w\}\}$.

Zeigen Sie, dass der vorliegende Algorithmus für keine Zahl $k \in \mathbb{N}$ ein k-Approximationsalgorithmus für das Auffinden eines minimalen Vertex Cover ist.