Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Agnes Dittel

28. Juni 2006

10. Übungsblatt

Gruppenübungen

G27 Gegeben sei eine Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei $\mathcal{I}$ die Menge der (über $\mathbb{R}$) affin unabhängigen Teilmengen von S.

a) Weisen Sie nach, dass $(S, \mathcal{I})$ ein Matroid ist.

b) Sei nun

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Lösen Sie das kombinatorische Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{X \in \mathcal{I}} & \sum\limits_{x \in X} x_1^2 \cdot x_3 \\ \text{s. t.} & X \text{ ist (bzgl. Mengeninklusion) maximal in } \mathcal{I}. \end{array}$$

G28 Wir betrachten nochmals die Lagrange-Funktion für das TSP aus Aufgabe G26:

$$\begin{array}{rlll} L(\lambda) = & \min & \sum_{i<j} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j \neq i} x_{ij} - 2 \right) & & (1) \\ & \text{s. t.} & \sum_j x_{1j} = 2 & & (2) \\ & & \sum_{i<j} x_{ij} = n & & (3) \\ & & \sum_{(i,j) \in \gamma(S),\, i<j} x_{ij} \leq |S| - 1 & \forall\, S \subseteq V \backslash \{1\},\ |S| \geq 3 & (4) \\ & & x_{ij} \in \{0,1\} & \forall\, i,j = 1,...,n,\ i \neq j. & (5) \end{array}$$

Die Kantenmengen, deren Inzidenzvektoren zulässig für dieses Problem sind, werden *1-Bäume* genannt.

a) Bringen Sie (1) in eine Form, die es erlaubt, die Berechnung von $L(\lambda)$ auf die Bestimmung eines gewichtsminimalen 1-Baumes zurückzuführen. Modifizieren Sie dazu die Kantengewichte c geeignet.

b) Geben Sie einen Algorithmus zur Bestimmung eines gewichtsminimalen 1-Baumes in einem ungerichteten Graphen mit nicht-negativen Kantengewichten an. Wie kann dieser Algorithmus zur Berechnung von $L(\lambda)$ (zu gegebenem $\lambda \in \mathbb{R}^n$) verwendet werden?

c) Geben Sie zu $\lambda \in \mathbb{R}^n$ einen Subgradienten von $L(\lambda)$ an. Verwenden Sie hierzu die Ergebnisse aus a) und b).

G29 Ein Mobilfunkanbieter betreibt deutschlandweit ein Netz von n Antennen. Jede Antenne empfängt Signale einer bestimmten Frequenz. Dem Mobilfunkanbieter stehen m verschiedene Frequenzen zur Verfügung, die den Antennen zugewiesen werden müssen.

Bei der Frequenzzuweisung müssen folgende Bedingungen eingehalten werden:

(1) Beträgt die (euklidische) Distanz zwischen zwei Antennen weniger als D_0 km, darf diesen beiden Antennen nicht die selbe Frequenz zugewiesen werden.

(2) Bei einer Distanz zwischen D_0 und $D_1 > D_0$ km darf zwar die selbe Frequenz zugewiesen werden, die dabei auftretenden Interferenzen verursachen jedoch Kosten von c Geldeinheiten pro Paar von interferierenden Antennen.

(3) Bei einer Distanz von mehr als D_1 km dürfen beide Antennen mit der selben Frequenz betrieben werden, ohne dass zusätzliche Kosten entstehen.

a) Formulieren Sie das Problem, eine kostenminimale Frequenzzuweisung zu finden, als ganzzahliges Programm.

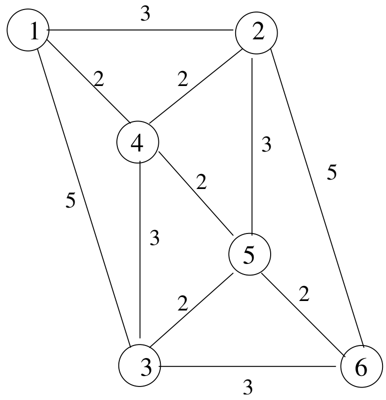
b) Für Antennen, welche in Grenznähe stehen, kann es Einschränkungen hinsichtlich der zuweisbaren Frequenzen geben. D. h., für jede Antenne in einem Grenzgebiet gibt es eine Teilmenge von $\{1, ..., m\}$ der für diese Antenne zulässigen Frequenzen.

   Erweitern Sie Ihr Modell aus a) derart, dass dieser Sachverhalt mit berücksichtigt wird.

Hausübungen

H24 (5 Punkte)

Gegeben sei folgender Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten c:



Ermitteln Sie mit Lagrange-Relaxierung und Subgradientenmethode (mit Schrittweite 1) anhand der Ergebnisse aus Aufgabe G28 eine Lösung des Traveling-Salesman-Problems auf G.

H25 (5 Punkte)

Für das Problem, gegebene Geldbeträge mit möglichst wenigen Münzen und Scheinen auszuzahlen, wird der Greedy-Algorithmus angewendet, der für den jeweiligen Restbetrag immer die größt mögliche Münze bzw. den größt möglichen Schein auszahlt und dann iteriert.

a) Zeigen Sie, dass der Greedy-Algorithmus für das Euro/Cent-System die Optimallösung liefert.

b) Gilt dies immer noch, wenn zusätzlich 30-Cent-Münzen bzw. 40-Cent-Münzen eingeführt würden?

H26 (5 Punkte)

Implementieren Sie eine Heuristik Ihrer Wahl für das Traveling-Salesman-Problem.

Ermitteln Sie mit Ihrem Verfahren für die beiden auf der Webseite der Veranstaltung hinterlegten Instanzen jeweils eine Tour möglichst geringen Gewichts.

Dokumentieren Sie Ihre Ergebnisse, inklusive gewählter Parameter und Abbruchkriterium, sowie der Laufzeit.

Diese Aufgabe kann in Zweiergruppen bearbeitet werden. Für die beste gefundene Lösung gibt es eine Kiste Bier oder etwas Äquivalentes zu gewinnen!