Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Agnes Dittel

21. Juni 2006

9. Übungsblatt

Gruppenübungen

G24 Gegeben sei das folgende ganzzahlige Optimierungsproblem (P):

$$
\begin{array}{lrrrcl}
\min & 4 & -2x_1 & -x_2 & & \\
\text{s. t.} & & & & & \\
(1) & & 3x_1 & +4x_2 & \leq & 6 \\
(2) & & x_1, & x_2 & \in & \{0,1\}.
\end{array}
$$

a) Geben Sie die Lagrange-Funktion $L(\lambda)$ und die Lagrange-Relaxierung von (P) bzgl. der Nebenbedingungen (1) an.

b) Skizzieren Sie $L(\lambda)$, und lesen Sie die Optimallösung der Lagrange-Relaxierung aus der Skizze ab.

c) Ermitteln Sie die Optimallösung von (P), und vergleichen Sie den Zielfunktionswert mit dem Optimalwert der Lagrange-Relaxierung.

G25 Wir betrachten das Problem (3.15) aus dem Skript:

$$
\begin{array}{ll}
\min & c^{\mathrm{T}}x \\
\text{s. t.} & A_1 x \leq b_1 \\
 & A_2 x \leq b_2 \\
 & x \in \mathbb{Z}^{n-p} \times \mathbb{R}^p
\end{array}
$$

und für $\lambda \geq 0$

$$L(\lambda) = \min c^{\mathrm{T}}x - \lambda^{\mathrm{T}}(b_1 - A_1 x), \quad x \in P^2.$$

Beweisen Sie folgende Aussage:

Falls x_λ Optimallösung von $L(\lambda)$ ist mit

(i) $A_1 x_\lambda \leq b_1$

(ii) $(A_1 x_\lambda)_i = (b_1)_i$, falls $\lambda_i > 0$,

dann ist x_λ Optimallösung von (3.15).

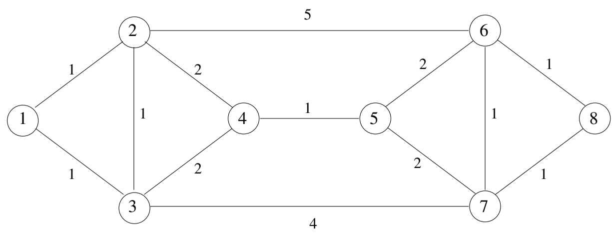
G26 Sei $G = (V, E)$ ein vollständiger Graph mit $|V| = n$ Knoten und Kantengewichten c_{ij} für $1 \leq i < j \leq n$. Wir betrachten das folgende ganzzahlige Programm, welches eine Formulierung für das symmetrische Traveling Salesman-Problem (TSP) auf G ist:

$$\begin{aligned}
&(1) && \min && \sum_{i<j} c_{ij} x_{ij} \\
&(2) && \text{s. t.} && \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 2, \quad i = 1, ..., n \\
&(3) && && \sum_{i<j} x_{ij} = n \\
&(4) && && \sum_{(i,j)\in\gamma(S),\, i<j} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall\, S \subseteq V \backslash \{1\},\ |S| \geq 3 \\
&(5) && && x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall\, i, j = 1, ..., n,\ i \neq j.
\end{aligned}$$

a) Geben Sie die Lagrange-Funktion $L(\lambda)$ und die Lagrange-Relaxierung bzgl. der Nebenbedingungen (2) für $i = 2, ..., n$ an.

b) Welche Eigenschaften haben die zulässigen Lösungen des relaxierten Problems im Vergleich zu einer Tour?

c) Bestimmen Sie die Optimallösung des relaxierten TSP zu $\lambda = 0$ für folgenden Graphen G:



Hausübungen

H22 (5 Punkte) Wir betrachten nochmals das IP-Modell für das unkapazitierte WLP aus Aufgabe H21:

$$
\begin{aligned}
&(6) \qquad && \min \quad && \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in N} f_j y_j \\
&(7) && \text{s. t.} && x_{ij} \le y_i \quad \forall i \in M,\ j \in N \\
&(8) && && \sum_{i \in M} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N \\
&(9) && && x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in M,\ j \in N, \\
&(10) && && y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in M.
\end{aligned}
$$

Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion bzgl. der Nebenbedingungen (8). Wie können die Funktionswerte berechnet werden?

H23 (5 Punkte)

A large company wishes to move some of its departments out of London. There are benefits to be derived from doing this (cheaper housing, government incentives, easier recruitment, etc.) which have been costed. Also, however, there will be greater costs of communication between departments. These have also been costed for all possible locations of each department.

Where should each department be located so as to minimize overall yearly cost?

The company comprises five departments (A, B, C, D, E). The possible cities for relocation are Bristol and Brighton, or a department may be kept in London. None of these cities (including London) may be the location for more than three of the departments.

Benefits to be derived from each relocation are given below (in thousands of pounds per year):

	A	B	C	D	E
Bristol	10	15	10	20	5
Brighton	10	20	15	15	15

Communication costs are of the form $c_{ik}d_{jl}$, where c_{ik} is the quantity of communication between departments i and k per year and d_{jl} is the cost per unit of communication between cities j and l. c_{ik} and d_{jl} are given by the tables below:

	A	B	C	D	E
A		0.0	1.0	1.5	0.0
B			1.4	1.2	0.0
C				0.0	2.0
D					0.7

Quantities of communication c_{ik} (in thousands of units).

	Bristol	Brighton	London
Bristol	5	14	13
Brighton		5	9
London			10

Costs per unit of communication d_{jl} (in pounds).