Diskrete Optimierung II

SS 2006

Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Agnes Dittel

14. Juni 2006

8. Übungsblatt

Gruppenübungen

G22 a) Gegeben sei das 0/1-Knapsack-Polytop

$$P_K(N,a,b) = \left\{ x \in \{0,1\}^n \mid \sum_{j\in N} a_j x_j \leq b \right\}$$

mit $N = \{1,...,n\}$, $a_j \geq 0$ für $j \in N$ und $b > 0$.
Sei $x^* \in \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j\in N} a_j x_j \leq b,\ 0 \leq x \leq \mathbb{1} \right\}$. Definiere

$$w = \min \left\{ \sum_{j\in N} (1 - x_j^*) z_j \mid \sum_{j\in N} a_j x_j > b,\ z \in \{0,1\}^n \right\}.$$

Zeigen Sie:

(i) Falls $w < 1$ mit Optimallösung z^R, dann verletzt x^* die Cover-Ungleichung

$$\sum_{j\in R} x_j \leq |R| - 1.$$

(ii) Falls $w \geq 1$, erfüllt x^* alle Cover-Ungleichungen.

b) Betrachten Sie das 0/1-Knapsack-Polytop

$$\{x \in \{0,1\}^6 \mid 45x_1 + 46x_2 + 79x_3 + 54x_4 + 53x_5 + 125x_6 \leq 178\}$$

und den Punkt

$$x^* = (0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 1, 0).$$

Geben Sie eine Cover-Ungleichung an, die von x^* verletzt wird.

G23 Beweisen Sie Satz 3.29 aus dem Skript:

Sei $G = (V,E)$ ein Graph und $(C, E(C))$ eine Clique in G.

Die Ungleichung

$$\sum_{i\in C} x_i \leq 1$$

ist gültig für das Stabile Mengen-Polytop $P(G)$. Sie definiert eine Facette von $P(G)$ genau dann, wenn $(C, E(C))$ maximal bzgl. Knoteninklusion ist.

Hausübungen

H20 (5 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = n$ und $P(G)$ das zugehörige Stabile Mengen-Polytop. d. h.

$$P(G) = \text{conv}\{x \in \{0,1\}^n \mid x_i + x_j \leq 1 \ \forall ij \in E\}.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $P(G)$ ist volldimensional.

(ii) $P(G)$ ist *submonoton*, d. h. $x \in P(G)$ impliziert $y \in P(G)$ für alle $0 \leq y \leq x$. Alle nichttrivialen Facetten von $P(G)$ haben nichtnegative Koeffizienten.

(iii) Die Nichtnegativitätsbedingungen $x_j \geq 0$ induzieren Facetten von $P(G)$.

H21 (5 Punkte)

a) Ein *unkapazitiertes, einstufiges Warehouse Location-Problem (WLP)* lässt sich wie folgt beschreiben:

Ein Unternehmen beliefert n Kunden, die pro Periode $b_1, ..., b_n$ Mengeneinheiten (ME) der von ihm angebotenen Güter nachfragen. Das Unternehmen möchte seine Vertriebskosten senken, indem es Auslieferungslager einrichtet und betreibt. Hierfür stehen m potentielle (für die Aufnahme eines Lagers geeignete) Standorte zur Verfügung. Wird am potentiellen Standort $i \in \{1, ..., m\}$ ein Lager errichtet, so entstehen fixe Kosten der Lagerhaltung in Höhe von f_i Geldeinheiten (GE) pro Periode. Die Transportkosten betragen c_{ij} GE, falls der Kunde voll (d. h. mit b_j ME) durch ein am Standort i eingerichtetes Lager beliefert wird.

Wie viele Lager sind vorzusehen, und an welchen der potentiellen Standorte sind sie einzurichten, wenn bei voller Befriedigung der Kundennachfrage die Summe aus (fixen) Lagerhaltungskosten und Transportkosten (vom Lager zum Kunden) minimiert werden soll?

Geben Sie eine Formulierung dieser Problemstellung als ganzzahliges Programm an.

b) Das *kapazitierte WLP* unterscheidet sich vom unkapazitierten WLP durch die Annahme, dass die Kapazität der an den potentiellen Standorten errichtbaren Lager $i \in M$ auf a_i $(i \in M)$ ME pro Periode beschränkt ist.

Geben Sie eine Formulierung des kapazitierten WLP als ganzzahliges Programm an.