Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Agnes Dittel

7. Juni 2006

7. Übungsblatt

Gruppenübungen

G19 Lösen Sie das folgende Optimierungsproblem:

$$
\begin{array}{lrrrcrl}
\max & x_1 & +x_2 & & & & \\
\text{s. t.} & & -3x_2 & -2x_3 & \leq & -2 & (1) \\
& -4x_1 & -3x_2 & -3x_3 & \leq & -6 & (2) \\
& 2x_1 & -2x_2 & +6x_3 & \leq & 5 & (3) \\
& x_1, & x_2, & x_3 & \in & \{0,1\} &
\end{array}
$$

G20 Gegeben sei das folgende Optimierungsproblem:

$$
\begin{array}{ll}
\min & c^{\mathrm{T}}x \\
\text{s. t.} & Ax \leq b \\
& 0 \leq x \leq u \\
& x \in \mathbb{Z}^n.
\end{array}
$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{Z}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$.

Sei $I \subseteq N := \{1, ..., n\}$ und

$$\sum_{i \in I} \alpha_i x_i \leq \alpha$$

eine für

$$P_I \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j = 0 \ \forall j \in N \backslash I\}$$

gültige Ungleichung mit $\alpha_i, \alpha \in \mathbb{Z}$.

Betrachten Sie die Ungleichung

(1) $$\alpha_t x_t + \sum_{i \in I} \alpha_i x_i \leq \alpha.$$

Welcher Wert kann für α_t maximal gewählt werden, damit (1) gültig ist für

$$P_I \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j = 0 \ \forall j \in N \backslash I, \ j \neq t\}?$$

G21 Aus Eisenstäben der Länge b sollen je k_i-mal Längen $\alpha_i \leq b$ für $i = 1, ..., n$ so zugeschnitten werden, dass die Anzahl der angeschnittenen Stäbe möglichst klein wird.

Formulieren Sie dieses Problem als ganzzahliges lineares Programm.

Hausübungen

H18 (10 Punkte)

Wir wollen in dieser Aufgabe eine Methode zur Verschärfung von Cover-Ungleichungen entwickeln. Gegeben sei eine Knapsack-Menge

$$X = \left\{ x \in \{0,1\}^n \mid \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \right\}$$

mit $a_j \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$.

a) Sei C ein Cover für X, d. h. $\sum_{j \in C} a_j > b$. Zeigen Sie, dass die *erweiterte Cover-Ungleichung*

$$\sum_{j \in E(C)} x_j \leq |C| - 1$$

mit $E(C) = C \cup \{j : \ a_j \geq a_i \ \ \forall\, i \in C\}$ gültig für X ist.

Betrachten Sie die Knapsack-Menge

$$Y = \{x \in \{0,1\}^7 \mid 11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 \leq 19\}.$$

b) Geben Sie für Y drei minimale Cover sowie die zugehörigen Cover-Ungleichungen an.

c) Betrachten Sie den Cover $C = \{3, 4, 5, 6\}$ für Y und die zugehörige Cover-Ungleichung $x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$. Geben Sie anhand von b) die erweiterte Cover-Ungleichung an. Lässt sich diese durch Modifikation von Koeffizienten weiter verschärfen?

d) Betrachten Sie nun die Knapsack-Menge

$$Y' = \{x \in \{0,1\}^5 \mid 11x_1 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19\}.$$

Für welche Werte α_1 ist die Ungleichung

$$\alpha_1 x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

gültig für Y' (vgl. Aufgabe G20)?

Im allgemeinen Fall suchen wir zu einer gegebenen Cover-Ungleichung

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$$

Koeffizienten α_j für $j \in \{1, ..., n\} =: N \backslash C$, so dass die Ungleichung

$$\sum_{i \in C} x_i + \sum_{j \in N \backslash C} \alpha_j x_j \leq |C| - 1$$

gültig für X ist.

e) Skizzieren Sie ein Verfahren, welches die Koeffizienten für eine solche Ungleichung liefert.

f) Ermitteln Sie mit dem Verfahren aus e) eine verschärfte Cover-Ungleichung für den Cover $C = \{3, 4, 5, 6\}$, welche gültig für Y ist.

H19 (5 Punkte)

Ein Glaser schneidet aus Glasplatten der Größe 3m $\times$ 7m im Auftrag seiner Kunden n kleinere Platten der Größe $a_i \times b_i$, $1 \leq i \leq n$ aus, wobei $a_i \leq 3$ und $b_i \leq 7$ für alle $1 \leq i \leq n$. Ziel ist es, die Aufträge so auf den einzelnen Glasplatten anzuordnen, dass die Anzahl angeschnittener Platten minimal ist. Beachten Sie, dass die Aufträge sowohl horizontal als auch vertikal platziert werden können.

Formulieren Sie dieses Problem als ganzzahliges lineares Programm und lösen Sie es mittels SCIP für den Datensatz, den Sie auf der Webseite finden.