Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Agnes Dittel
31. Mai 2006

6. Übungsblatt

Gruppenübungen

G16 Gegeben sei die Familie ganzzahliger Programme mit $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{llrl} \max & & x_2 & \\ \text{s. t.} & kx_1 & +x_2 & \leq k \\ & -kx_1 & +x_2 & \leq 0 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \\ & & x_1, x_2 & \in \mathbb{Z} \end{array}$$

mit den zugehörigen Polyedern P_k.

a) Zeigen Sie, dass P_k^1 durch das folgende System beschrieben wird:

$$\begin{array}{llrl} \max & & x_2 & \\ \text{s. t.} & (k-1)x_1 & +x_2 & \leq k-1 \\ & -(k-1)x_1 & +x_2 & \leq 0 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \\ & & x_1, x_2 & \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

b) Benutzen Sie Ihre Ergebnisse aus Teil a), um zu zeigen, dass in diesem Beispiel die Zahl t mit $t = \min_{s \in \mathbb{N}} P_k^s = (P_k)_I$ (siehe Satz 3.9 im Skript) exponentiell in der Kodierungslänge der Eingabe (A, b) ist.

G17 a) Sei $P_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z} \mid x + y \geq b\}$ und $f = b - \lfloor b \rfloor$. Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$x \geq f \cdot (\lceil b \rceil - y)$$

gültig für P_1 ist.

b) Sei $P_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z} \mid y \leq b + x\}$ und $f = b - \lfloor b \rfloor$. Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$y \leq \lfloor b \rfloor + \frac{x}{1-f}$$

gültig für P_2 ist.

G18 Zeigen Sie: Ein Graph $G = (V, E)$ ist bipartit genau dann, wenn er keine Kreise ungerader Länge enthält.

Hausübungen

H15 (5 Punkte)

Lösen Sie folgende Optimierungsprobleme mit Hilfe von Gomory-Schnitten:

$$(1)\quad \begin{array}{lrrl} \max & 4x_1 & -x_2 & \\ \text{s. t.} & 7x_1 & -2x_2 & \leq 14 \\ & & +x_2 & \leq 3 \\ & 2x_1 & -2x_2 & \leq 3 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \\ & & x_1, x_2 & \in \mathbb{Z}, \end{array} \qquad (2)\quad \begin{array}{lrrl} \max & 4x_1 & -x_2 & \\ \text{s. t.} & 7x_1 & -2x_2 & \leq 14 \\ & & +x_2 & \leq 3 \\ & 2x_1 & -2x_2 & \leq 3 \\ & & x_1 & \in \mathbb{Z}_+ \\ & & x_2 & \geq 0. \end{array}$$

H16 (5 Punkte)

Sei $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+^2 \mid a_1 y_1 + a_2 y_2 \leq b + x\}$ mit $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ und $b \notin \mathbb{Z}$. Sei weiterhin $f = b - \lfloor b \rfloor$ und $f_i = a_i - \lfloor a_i \rfloor$ für $i = 1, 2$.

Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$\lfloor a_1 \rfloor y_1 + \left(\lfloor a_2 \rfloor + \frac{f_2 - f}{1 - f} \right) y_2 \leq \lfloor b \rfloor + \frac{x}{1 - f}$$

gültig für P ist.

H17 (5 Punkte)

Gegeben sei ein 0/1-Programm (P):

$$\begin{array}{ll} \max & c^{\mathrm{T}} x \\ \text{s. t.} & Ax \leq b \\ & x \in \{0, 1\}^n. \end{array}$$

Zeigen Sie, dass jede 0/1-Lösung der LP-Relaxierung von (P) eine Ecke von $P(A, b) \cap [0, 1]^n$ ist.