Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Agnes Dittel

24. Mai 2006

5. Übungsblatt

GRUPPENÜBUNGEN

G13 Gegeben sei das Polyeder

$$P = \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie ein Ungleichungssystem $Ax \leq b$ mit A und b ganzzahlig, welches TDI ist, so dass $P = \{x \mid Ax \leq b\}$.

Ist Ihr System eine minimale Beschreibung von P?

G14 Beweisen Sie Lemma 3.2 aus dem Skript:

Sei P ein Polyeder. Dann enthält jede minimale Seitenfläche von P ganzzahlige Punkte genau dann, wenn jede Stützhyperebene ganzzahlige Punkte enthält.

Hinweis: Benutzen Sie das ganzzahlige Analogon des Farkas-Lemma (Satz 2.27).

G15 Gegeben sei ein zusammenhängender, ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit einer Kantengewichtsfunktion $w : E \longrightarrow \mathbb{R}$.

Gesucht ist ein minimaler aufspannender Baum von G, d. h. eine Kantenmente $T \subseteq E$ mit $w(T) = \min_{S \subseteq E} w(S)$, wobei $G_T = (V, T)$ zusammenhängend und kreisfrei ist.

Formulieren Sie ein ganzzahliges Programm zur Modellierung dieses Problems.

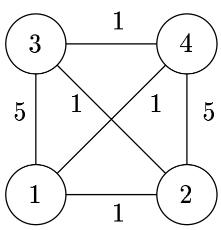
H13 (3 Punkte)

a) Bestimmen Sie für die folgenden Graphen (z. B. mit dem Algorithmus von Kruskal) jeweils einen minimalen aufspannenden Baum, und ermitteln Sie dessen Durchmesser.

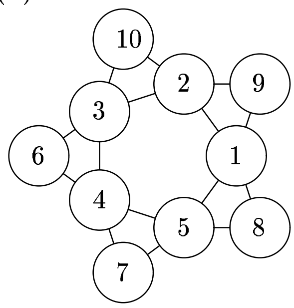
   Hinweis: Der Durchmesser eines Baumes T ist definiert durch die Länge des längsten Weges zwischen zwei Knoten in T. Dabei ist mit der Länge eines Weges die Anzahl der besuchten Knoten gemeint.

b) Können Sie in einem (oder mehreren) der Fälle einen weiteren minimalen aufspannenden Baum angeben, welcher einen geringeren Durchmesser hat als der in Teil a) bestimmte?

(i)



(ii)



Alle Kantengewichte 1

H14 (12 Punkte)

a) Entwickeln Sie ein IP-Modell, welches zur Bestimmung eines minimalen aufspannenden Baumes eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Durchmesser von höchstens D (D wird vorgegeben) benutzt werden kann.

b) Setzen Sie dieses IP-Modell in ZIMPL um, und bestimmen Sie mit SCIP jeweils eine optimale Lösung für die Graphen aus Aufgabe H13.

   Wählen Sie für Beispiel (i) den maximalen Durchmesser $D = 2$, und rechnen Sie Beispiel (ii) mit $D = 4$ und $D = 5$.