Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Agnes Dittel

10. Mai 2006

3. Übungsblatt

Gruppenübungen

G7 Gegeben sei das Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{array}{rrcr} -10x_1 & -6x_2 & \leq & -15 \\ 2x_1 & +6x_2 & \leq & 15 \\ 6x_1 & -4x_2 & \leq & 9. \end{array}$$

a) Skizzieren Sie P in der Ebene, und markieren Sie alle ganzzahligen Punkte, welche in P enthalten sind. Wählen Sie einen nicht zu kleinen Maßstab (Empfehlung: 3 cm pro Längeneinheit).

b) Bestimmen Sie zeichnerisch $P_{I,1}$ und $P_{I,2} (= P_I)$.

c) Geben Sie jeweils eine Menge von Ungleichungen an, welche $P_{I,1}$ und $P_{I,2}$ beschreiben.

G8 Sei A die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen $G(V, E)$, d. h. $A = (a_{ij})_{i \in V, j \in E}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j \in \delta^+(i), \\ -1, & \text{falls } j \in \delta^-(i), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass A total unimodular ist.

G9 Beweisen Sie Lemma 1.27 aus dem Skript:

Für S, $S_i \subseteq \mathbb{K}^n$, $(i \in \{1, ..., k\})$ gilt:

(a) $S_i \subseteq S_j \Rightarrow {S_j}^\circ \subseteq {S_i}^\circ$.

(b) $S \subseteq S^{\circ\circ}$.

(c) $\left(\bigcup_{i=1}^k S_i\right)^\circ = \bigcap_{i=1}^k {S_i}^\circ$.

(d) $S^\circ = \text{cone}(S^\circ) = (\text{cone}(S))^\circ$.

Hausübungen

H7 (5 Punkte)

Beweisen Sie Bemerkung 2.12 aus dem Skript:

Sei P ein rationales Polyeder. Dann sind äquivalent:

(a) $P = P_I$

(b) Jede Seitenfläche von P enthält einen ganzzahligen Punkt.

(c) Jede minimale Seitenfläche von P enthält einen ganzzahligen Punkt.

(d) $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ wird von einem ganzzahligen Punkt angenommen, für alle $c \in \mathbb{R}^n$, für die das Maximum endlich ist.

H8 (5 Punkte)

Beweisen Sie Beobachtung 2.14 aus dem Skript:

Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$.

(a) A ist genau denn total unimodular, wenn $[A, I]$ unimodular ist.

(b) A ist genau denn total unimodular, wenn $\begin{bmatrix} A \\ -A \\ I \\ -I \end{bmatrix}$ total unimodular ist.

(c) A ist genau denn total unimodular, wenn A^T total unimodular ist.

H9 (5 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

Eine *stabile Menge* in G ist eine Teilmenge $U \subseteq V$, so dass es keine Kante in E gibt, welche zwei Knoten in U verbindet.

Wir führen nun für jeden Knoten $i \in V$ eine Binärvariable $x_i \in \{0, 1\}$ ein und definieren die Polyeder

$$\begin{aligned} P &:= \left\{ x \in [0,1]^{|V|} \mid x_i + x_j \leq 1 \quad \forall (i,j) \in E \right\} \quad \text{und} \\ S &:= \operatorname{conv} \left\{ x \in \{0,1\}^{|V|} \mid x \text{ stabil in } G \right\}. \end{aligned}$$

Dabei heißt ein Vektor $x \in \{0,1\}^{|V|}$ *stabil in* G, falls die Menge $\{i \in V \mid x_i = 1\}$ eine stabile Menge in G ist.

a) Zeigen Sie: $S \subseteq P$.

b) Gilt auch $P \subseteq S$?

c) Sei $Q := \operatorname{conv} \left\{ x \in \{0,1\}^{|V|} \mid x_i + x_j \leq 1 \quad \forall (i,j) \in E \right\}$. Gelten dann $S \subseteq Q$ bzw. $Q \subseteq S$?