Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Agnes Dittel

3. Mai 2006

2. Übungsblatt

Gruppenübungen

G4 a) Sei P ein Polyeder. Zeigen Sie:

P besitzt (mindestens) eine Ecke $\Leftrightarrow$ 0 ist eine Ecke von $\text{rec}(P)$.

b) Sei $P \subseteq \mathbb{K}^n$ ein Polyeder, welches mindestens eine Ecke besitzt, und sei $z \in \text{rec}(P) \setminus \{0\}$. Beweisen Sie die Äquivalenz der beiden Aussagen:

(i) z lässt sich nicht als echte konische Kombination zweier linear unabhängiger Elemente von $\text{rec}(P)$ darstellen.

(ii) $(\text{rec}(P) \setminus \text{cone}(\{z\})) \cup \{0\}$ ist ein Kegel.

G5 Gegeben sei das Polyeder $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{R}^3$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner sei

$$H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 6\} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit dem Projektionsalgorithmus die Projektion von P auf H entlang c.

G6 Gegeben sei ein Polyeder $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{K}^n$. Eine *Kugel* mit Radius r und Mittelpunkt z ist definiert durch $B_{z,r} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid ||x - z||_2 \leq r\}$.

Wir möchten eine Kugel mit größtmöglichem Radius finden, welche ganz in P enthalten ist. Formulieren Sie ein lineares Programm zu diesem Problem.

Hausübungen

H4 (5 Punkte)

Beweisen Sie folgenden Satz:

Sei $P = P(A,b) = \mathrm{conv}(V) + \mathrm{cone}(E)$ ein nichtleeres Polyeder. Dann gilt

$$\mathrm{rec}(P) = P(A,0) = \mathrm{cone}(E).$$

H5 (5 Punkte)

Zu einem Polyeder $P \subseteq \mathbb{K}^n$ definieren wir die γ-*Polare* P^γ durch

$$P^\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1} \mid a^{\mathrm{T}} x \leq \alpha \quad \forall x \in P \right\}.$$

Beweisen Sie folgenden Satz:

Sei $P = P(A,b) = \mathrm{conv}(V) + \mathrm{cone}(E)$ ein nichtleeres Polyeder in $\mathbb{K}^n$. Dann gilt

(a)

$$P^\gamma = \mathrm{cone}\left(\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} & 0 \\ b^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} \right).$$

(b)

$$P^\gamma = P\left(\begin{pmatrix} V^{\mathrm{T}} & -\mathbb{1} \\ E^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

H6 (5 Punkte)

a) Geben Sie ein Verfahren an, welches unter Verwendung der FME lineare Programme der Form $\max \{c^{\mathrm{T}} x \mid Ax \leq b\}$ löst.

b) Benutzen Sie das in a) beschriebene Verfahren zur Lösung des linearen Programms

$$\begin{array}{lrrrcr}
\max & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & & \\
\text{s. t.} & 3x_1 & +x_2 & -2x_3 & \leq & 0 \\
 & x_1 & -2x_2 & -4x_3 & \leq & -14 \\
 & -x_1 & +3x_2 & -2x_3 & \leq & -8 \\
 & -x_1 & +x_2 & +4x_3 & \leq & 14 \\
 & -2x_1 & -5x_2 & +x_3 & \leq & -6
\end{array}$$