



1. Übungsblatt

GRUPPENÜBUNGEN

G1 Beweisen Sie die folgenden Aussagen des Satzes von Weyl: Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ sind

- $\text{lin}(A)$,
- $\text{aff}(A)$,
- $\text{conv}(A)$

Polyeder.

G2 Gegeben sei das Polyeder P durch die innere Beschreibung:

$$P = \text{conv} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \right) + \text{cone} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

- Ermitteln Sie *zeichnerisch* eine äußere Beschreibung von P .
- Geben Sie ein Verfahren an, mit dem man mittels Fourier-Motzkin-Elimination *rechnerisch* die äußere Beschreibung von P erhält.

G3 Modellieren Sie die folgenden Teilmengen des \mathbb{R}^2 jeweils als zulässigen Bereich eines gemischt-ganzzahligen linearen Programms:

- $M_1 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 1), (4, 2)\}$
- $M_2 = ([0, 1] \times \{1\}) \cup ([1, 2] \times \{3\}) \cup ([2, 3] \times \{2\}) \cup ([3, 4] \times \{3\})$
- $M_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq x_1 \leq 3, |x_1| \leq x_2 \leq |x_1| + 1\}$

HAUSÜBUNGEN

H1 (5 Punkte)

Beweisen Sie folgenden Satz:

Seien $P \subseteq \mathbb{K}^n$ ein Polyeder und $c \in \mathbb{K}^n$. Das lineare Programm $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ ist genau dann unbeschränkt, wenn es eine Extremale ϵ von P gibt mit $c^T \epsilon > 0$.

H2 (5 Punkte)

Das Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^3$ sei durch folgendes Ungleichungssystem gegeben:

$$\begin{array}{rcll} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & & & \geq & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 4 \\ x_1 & & & & & \geq & 0 \\ & & & & x_2 & \geq & 0 \\ & & & & & & x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Geben Sie eine Darstellung von P in der Form $P = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$ an.

H3 (5 Punkte)

Zur Einteilung der Übungsgruppen zur Vorlesung „Diskrete Optimierung II“ wurden in der ersten Vorlesung folgende Wunschzettel verteilt, auf denen Einzelpersonen oder kleine Arbeitsgruppen von bis zu vier Studierenden ihre Präferenzen eintragen können:

Name, Vorname	Studiengang	Semester		
1.				
2.				
3.				
4.				
Übung	Präferenz			
	☺	☹	⊗	
Mi. 8.00 - 9.40	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Mi. 9.50 - 11.30	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Mi. 11.40 - 13.20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	

- a) Formulieren Sie ein gemischt-ganzzahliges Programm zum Finden einer Einteilung, welche die Präferenzen der Studierenden bestmöglich berücksichtigt. Des Weiteren sollen folgende Nebenbedingungen eingehalten werden:
- (i) Es gibt drei Übungsgruppen.
 - (ii) Es sollen maximal zwei Übungen gleichzeitig stattfinden.
 - (iii) Die Anzahl der Studierenden soll in allen drei Übungsgruppen möglichst gleich sein.
 - (iv) Kleingruppen dürfen nicht getrennt werden.
- b) Auf der Webseite der Veranstaltung „Diskrete Optimierung II“ finden Sie die entsprechenden Daten. Lösen Sie Ihr Programm für diesen Datensatz mit ZIMPL und SCIP, und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der tatsächlichen Einteilung, welche Sie ebenfalls auf der Webseite finden.