Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Agnes Dittel
5. Juli 2006

Lösungsvorschlag zum 11. Übungsblatt

Gruppenübungen

G30 vgl. Beispiel 5.7 aus dem Skript, mit $n = 4$, $b = 7$.

Die Rekursion lautet

$$\begin{aligned} J_5(d) &= 0 \quad \text{für } d = 0, ..., 7 \\ J_i(d) &= \begin{cases} J_{i+1}(d), & \text{falls } d < a_i, \\ \max\{J_{i+1}(d), c_i + J_{i+1}(d - a_i)\}, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

für $i = 4, 3, 2, 1, \quad d = 0, ..., 7$.

Setze weiterhin die Label

$$p_i(d) = \begin{cases} 0, & \text{falls } J_i(d) = J_{i+1}(d), \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $i = 4, 3, 2, 1, \quad d = 0, ..., 7$, um zu kennzeichnen, ob Objekt x_i bei Restkapazität d gewählt wurde oder nicht.

Die Werte für $J_i(d)$ und $p_i(d)$ lauten

d	$J_5(d)$	$J_4(d)$	$J_3(d)$	$J_2(d)$	$J_1(d)$	$p_4(d)$	$p_3(d)$	$p_2(d)$	$p_1(d)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	7	7	0	0	1	0
2	0	0	0	7	10	0	0	1	1
3	0	0	0	7	17	0	0	1	1
4	0	0	0	7	17	0	0	1	1
5	0	24	24	24	24	1	0	0	0
6	0	24	25	31	31	1	1	1	0
7	0	24	25	32	34	1	1	1	1

Optimaler Zielfunktionswert ist $J_1(7) = 34$. Damit lässt sich die Optimallösung bestimmen:

$$\begin{aligned} p_1(7) = 1 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = 1 \\ p_2(5) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 0 \\ p_3(5) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_3 = 0 \\ p_4(5) = 1 \quad &\Rightarrow \quad x_4 = 1. \end{aligned}$$

Damit lautet die Optimallösung $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 0, 1)$.

G31 Wir lösen das Problem mittels Dynamischer Programmierung. In Anlehnung an das 0/1-Knapsack-Problem (Beispiel 5.7 aus dem Skript) setzen wir

$$\begin{aligned} T = n + 1: &\quad \text{für jede Variable (plus Slackvariable) eine Periode} \\ d_j: &\quad \text{Restkapazität in Periode } j \\ y_j: &\quad \text{Steuervariablen} \end{aligned}$$

Die Übergangsfunktion lautet

$$d_{j+1} = f_j(d_j, y_j) = d_j - a_j y_j.$$

Die Zielfunktion lautet

$$g_j((d_j, y_j) = c_j y_j.$$

Ferner haben wir

$$\begin{aligned} X_j &= \{0,...,b\}, \quad j=1,...,n+1 \\ d_1 &= b \\ S_j &= \left\{0,...,\left\lfloor \frac{d_j}{a_j} \right\rfloor\right\} \end{aligned}$$

Damit lautet das Dynamische Programm für das ganzzahlige Rucksackproblem:

$$\begin{array}{lrcll} \max & \sum_{j=1}^{n} g_j(d_j,y_j) & = & \sum_{j=1}^{n} c_j y_j & \\ \text{s. t.} & d_{j+1} & = & d_j - a_j y_j & (j=1,...,n) \\ & d_1 & = & b & \\ & d_j & \in & X_j & (j=1,...,n+1) \\ & y_j & \in & S_j & (j=1,...,n). \end{array}$$

Der DP-Algorithmus lautet somit

$$\begin{aligned} J_{n+1}(d) &= 0 \quad \text{für } d=0,1,...,b \\ J_i(d_i) &= \max_{y_i \in S_i} \{g_i(d_i,y_i) + J_{i+1}(f_i(d_i,y_i))\} \\ &= \max_{y_i \in \left\{0,...,\left\lfloor \frac{d_j}{a_j} \right\rfloor\right\}} \{c_i y_i + J_{i+1}(d_i - a_i y_i)\} \quad \text{für } i=n,...,1. \end{aligned}$$

G32 Wir führen für $i=1,...,m$ die Variablen

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } A_i x \le b_i \text{ erfüllt ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

ein. Nun formulieren wir das gemischt-ganzzahlige Programm

$$\begin{array}{llll} \max & c^{\mathrm{T}} x & & \\ \text{s. t.} & A_i x \le b_i + (1-y_i)M & \text{für } i=1,...,m & (1) \\ & \sum_{i=1}^{m} y_i \ge k & & (2) \\ & y_i \in \{0,1\} & \text{für } i=1,...,m & \\ & l \le x \le u, & & \end{array}$$

wobei

$$M = \max_{i=1,...,m} M_i \quad \text{mit} \quad M_i = \max\{A_i x - b_i \mid l \le x \le u\}.$$

Dann besagt Nebenbedingung (1): Falls $y_i = 1$, gilt $A_i x \le b_i$, d. h. die entsprechende Ungleichung ist erfüllt. Falls $y_i = 0$, gilt $A_i x - b_i \le M_i$, also $A_i x \le b_i + M_i \le b_i + M$, d. h. die entsprechende Ungleichung ist redundant.

Nebenbedingung (2) stellt sicher, dass mindestens k Ungleichungen erfüllt sind.