Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Agnes Dittel

28. Juni 2006

Lösungsvorschlag zum 10. Übungsblatt

GRUPPENÜBUNGEN

G27 a) $\mathcal{I}$ ist ein Unabhängigkeitssystem, da jede Teilmenge einer Menge affin unabhängiger Vektoren ebenfalls affin unabhängig ist.

Ferner wissen wir aus der Linearen Algebra, dass jede Basis einer Menge affin unabhängiger Vektoren die selbe Kardinalität hat.

Damit sind die Matroideigenschaften für $(S, \mathcal{I})$ nachgewiesen.

b) Wir wenden Greedy-Min an:

(1) Für $s \in S$ definieren wir

$$w(s) := s_1^2 \cdot s_3.$$

Wir sortieren die Elemente von $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ aufsteigend, so dass $w(s_1) \leq w(s_2) \leq \ldots \leq w(s_5)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} s_1 &= (1,0,-2)^{\mathrm{T}} \quad \text{mit} \quad w(s_1) = -2,\\ s_2 &= (1,0,0)^{\mathrm{T}} \quad \text{mit} \quad w(s_2) = 0,\\ s_3 &= (1,1,0)^{\mathrm{T}} \quad \text{mit} \quad w(s_3) = 0,\\ s_4 &= (1,0,1)^{\mathrm{T}} \quad \text{mit} \quad w(s_4) = 1,\\ s_5 &= (2,0,1)^{\mathrm{T}} \quad \text{mit} \quad w(s_5) = 4. \end{aligned}$$

(2) $B = \emptyset$

(3)
- $k = 1$:
  $B \cup \{s_1\} \in \mathcal{I}$, da $\{(1,0,-2)^{\mathrm{T}}\}$ affin unabhängig ist (wegen $\emptyset$ linear unabhängig).
  $\Rightarrow$ setze $B = B \cup \{s_1\}$.
- $k = 2$:
  $B \cup \{s_2\} \in \mathcal{I}$, da $\{(1,0,-2)^{\mathrm{T}}, (1,0,0)^{\mathrm{T}}\}$ affin unabhängig ist (wegen $\{(1,0,-2)^{\mathrm{T}} - (1,0,0)^{\mathrm{T}}\} = \{(0,0,-2)^{\mathrm{T}}\}$ linear unabhängig).
  $\Rightarrow$ setze $B = B \cup \{s_2\}$.
- $k = 3$:
  $B \cup \{s_3\} \in \mathcal{I}$, da $\{(1,0,-2)^{\mathrm{T}}, (1,0,0)^{\mathrm{T}}, (1,1,0)^{\mathrm{T}}\}$ affin unabhängig ist (wegen $\{(1,0,-2)^{\mathrm{T}} - (1,0,0)^{\mathrm{T}}, (1,1,0)^{\mathrm{T}} - (1,0,0)^{\mathrm{T}}\} = \{(0,0,-2)^{\mathrm{T}}, (0,1,0)^{\mathrm{T}}\}$ linear unabhängig).
  $\Rightarrow$ setze $B = B \cup \{s_3\}$.
- $k = 4$:
  $B \cup \{s_4\} \notin \mathcal{I}$, da $\{(1,0,-2)^{\mathrm{T}}, (1,0,0)^{\mathrm{T}}, (1,1,0)^{\mathrm{T}}, (1,0,1)^{\mathrm{T}}\}$ affin abhängig ist (wegen $\{(1,0,-2)^{\mathrm{T}} - (1,0,0)^{\mathrm{T}}, (1,1,0)^{\mathrm{T}} - (1,0,0)^{\mathrm{T}}, (1,0,1)^{\mathrm{T}} - (1,0,0)^{\mathrm{T}}\} = \{(0,0,-2)^{\mathrm{T}}, (0,1,0)^{\mathrm{T}}, (0,0,1)^{\mathrm{T}}\}$ linear abhängig).
- $k = 5$:
  $B \cup \{s_5\} \in \mathcal{I}$, da $\{(1,0,-2)^{\mathrm{T}}, (1,0,0)^{\mathrm{T}}, (1,1,0)^{\mathrm{T}}, (2,0,1)^{\mathrm{T}}\}$ affin unabhängig ist (wegen $\{(1,0,-2)^{\mathrm{T}} - (1,0,0)^{\mathrm{T}}, (1,1,0)^{\mathrm{T}} - (1,0,0)^{\mathrm{T}}, (2,0,1)^{\mathrm{T}} - (1,0,0)^{\mathrm{T}}\} = \{(0,0,-2)^{\mathrm{T}}, (0,1,0)^{\mathrm{T}}, (1,0,1)^{\mathrm{T}}\}$ linear unabhängig).
  $\Rightarrow$ setze $B = B \cup \{s_5\}$.

(5) Ausgabe:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

G28 a) , b) siehe Lösungsvorschlag zu Aufgabe G26.

c) Wir bringen $L(\lambda)$ in eine Form, die es ermöglicht, durch Anwendung von Satz 3.37 einen Subgradienten zu bestimmen. Sei dazu $\mathcal{T}$ die Menge aller 1-Bäume auf G. Dann ist

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \min_{T \in \mathcal{T}} \left(c^\lambda(T) - 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) \\ &= \min_{T \in \mathcal{T}} \left(c(T) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(T) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) \\ &= \min_{T \in \mathcal{T}} \left(c(T) - 2\sum_{i=1}^{n} (d_i(T) - 2)\lambda_i \right), \end{aligned}$$

wobei $d_i(T)$ den Grad des Knotens i in T bezeichnet.
Nun gilt nach Satz 3.37 (a):

$$g = \begin{pmatrix} d_1(T^\lambda) - 2 \\ \vdots \\ d_n(T^\lambda) - 2 \end{pmatrix}$$

ist ein Subgradient an L in λ. Dabei bezeichnet T^λ einen 1-Baum von G, der bzgl. der Gewichte λ minimal ist.

G29 a) Wir verwenden folgende Mengen:

- Menge der Antennen:
$$A = \{1, ..., n\}$$
- Menge der verfügbaren Frequenzen:
$$F = \{1, ..., m\}$$
- Menge der Antennenpaare mit Abstand $d \leq D_0$:
$$S_0 = \{\{i, j\} \mid d(i, j) \leq D_0,\ i, j \in A\}$$
- Menge der Antennenpaare mit Abstand $D_0 \leq d \leq D_1$:
$$S_1 = \{\{i, j\} \mid D_0 \leq d(i, j) \leq D_1,\ i, j \in A\}$$

Wir führen folgende Variablen ein:

- Für jede Antenne $i \in A$ und jede Frequenz $f \in F$ sei
$$z_i^f = \begin{cases} 1, & \text{falls Antenne } i \text{ Frequenz } f \text{ empfängt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$
- Für jedes Paar $\{i, j\}, i, j \in A$ von Antennen sei
$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls Antennen } i \text{ und } j \text{ die selbe Frequenz empfangen,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Zielfunktion lautet
$$\min \sum_{\{i,j\} \in S_1} e_{ij},$$
wobei folgende Nebenbedingungen eingehalten werden müssen:

- Jeder Antenne muss genau eine Frequenz zugewiesen werden:
$$\sum_{f \in F} z_i^f = 1 \quad \forall\, i \in A$$
- Zwei Antennen mit Distanz kleiner als D_0 dürfen nicht die selbe Frequenz erhalten:
$$e_{ij} = 0 \quad \forall\, \{i, j\} \in S_0$$
- Kopplung e- an z-Variablen:
$$\begin{aligned} z_i^f + z_j^f &\leq 1 + e_{ij} \\ e_{ij} &\leq z_i^f \\ e_{ij} &\leq z_j^f \quad \forall\, \{i, j\}\ (i, j \in A), f \in F \end{aligned}$$

b) Anstelle der Menge F führen wir nun für jede Antenne $i \in A$ eine Menge $F_i \subseteq F$ von Frequenzen ein, welche i zugewiesen werden dürfen.

Dann lautet die erste Nebenbedingung:
$$\sum_{f \in F_i} z_i^f = 1 \quad \forall\, i \in A.$$